

Tehtäviä

Aloita näistä

1. Laske aritmeettisen jonon 4, 8, 12, 16, 20,... kymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

Ratkaisu

$$a_n = 4n$$

$$a_{10} = 40$$

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{4+40}{2} = 220$$

2. Laske aritmeettisen jonon 2, 7, 12, 17, 22,... sadan ensimmäisen jäsenen summa.

Ratkaisu

$$a_n = 5n - 3$$

$$a_{100} = 497$$

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{2+497}{2} = 24\,950$$

3. Laske aritmeettisen summan arvo, kun tiedetään, että viimeinen summattava on luku -37 ja jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat 5, 2 ja -1.

Ratkaisu

$$d = -3$$

$$a_n = -3n + 8$$

Selvitetään, monesko lukujonon jäsen on luku -37.

$$-3n + 8 = -37 \Leftrightarrow -3n = -45 \Leftrightarrow n = 15$$

$$S_{15} = 15 \cdot \frac{5 + (-37)}{2} = -240$$

4. Laske aritmeettisen summan $15+20+25+\dots+75$ arvo.

Ratkaisu

$$a_n = 5n + 10$$

Selvitetään, monesko lukujonon jäsen on viimeinen summattava, luku 75.

$$5n+10=75 \Leftrightarrow 5n=65 \Leftrightarrow n=13$$

$$S_{13} = 13 \cdot \frac{15+75}{2} = 585$$

5. Aritmeettisen lukujonon ensimmäiset jäsenet ovat 1, 4, 7, 10, 13,...

Kirjoita kymmenen ensimmäisen jäsenen summa käyttäen summakaavaa ja laske kyseinen summa.

Ratkaisu

$$a_n = 3n - 2$$

$$\sum_{n=1}^{10} (3n-2)$$

$$a_{10} = 28$$

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{1+28}{2} = 145$$

6. Laske aritmeettisen lukujonon jäsenten summa kymmenennestä jäsenestä 20. jäseneen, kun jonon yleinen jäsen on $a_n = 6n + 3$.

Ratkaisu

$$a_{10} = 63, a_{20} = 123$$

$$S_{11} = 11 \cdot \frac{63+123}{2} = 1023$$

Paranna osaamistasi

7. Kuinka monta aritmeettisen jonon 2, 9, 16, 23,... jäsentä on laskettava yhteen, jotta jäsenten summa on yli 500?

Ratkaisu

$$a_n = 7n - 5$$

$$n \cdot \frac{2 + (7n - 5)}{2} > 500 \Leftrightarrow 7n^2 - 3n > 1000$$

Ratkaistaan esimerkiksi Solve -komennolla yhtälö $7n^2 - 3n - 1000 = 0$, jonka vastauksesta päätellään, että 13 jonon jäsentä on laskettava yhteen, jotta summaksi tulee yli 500.

8. Aritmeettisen summan arvoksi saadaan 165, kun ensimmäinen summattava jäsen on $\frac{1}{2}$ ja viimeinen $21\frac{1}{2}$. Kuinka monta jäsentä summassa on laskettu yhteen?

Ratkaisu

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$165 = n \cdot \frac{22}{2} \Leftrightarrow n = 15$$

9. Aritmeettisen summan arvo on 342, kun yhteenlaskettavia on 18. Mikä on viimeisen summattavan arvo, kun ensimmäinen on 6?

Ratkaisu

$$S_{18} = 18 \cdot \frac{6 + a_{18}}{2} = 342$$

$$54 + 9a_{18} = 342 \Leftrightarrow 9a_{18} = 288 \Leftrightarrow a_{18} = 32$$

10. Heikki aloittaa juoksuharjoittelun juoksemalla ensimmäisenä päivänä kilometrin ja lisäämällä joka päivä juoksumatkaansa 100 metriä.

- Kuinka paljon Heikin tulisi juosta kuukauden (30 pvä) päästä?
- Kuinka paljon Heikki juoksee kuukauden aikana yhteensä?

Ratkaisu

$$a) a_n = 0.1n + 0.9$$

$$a_{30} = 3.9 \text{ (km)}$$

$$b) S_{30} = 30 \cdot \frac{1+3.9}{2} = 73.5 \text{ (km)}$$

11. Marin opiskelijakorttiin ladataan 2100 euroa opiskelijalounaita varten. Opiskelijahintainen lounas maksaa 1.75 euroa.

a) Kuinka monena päivänä Mari voi käydä syömässä?

b) Jos oletetaan, että aterian hinta nousee sentillä joka päivä, kuinka monena peräkkäisenä päivänä Mari voi käydä syömässä?

c) Mikä on aterian hinta tällöin viimeisellä ruokailukerralla?

Ratkaisu

$$a) \frac{2100 \text{ €}}{1.75 \text{ €}} = 1200$$

$$b) a_n = 0.01n + 1.74$$

$$2100 = n \cdot \frac{1.75 + (0.01n + 1.74)}{2} \Leftrightarrow 4200 = 3.49n + 0.01n^2$$

Ratkaistaan yhtälö $0.01n^2 + 3.49n - 4200 = 0$ esimerkiksi Solve -komennolla, jolloin saadaan vastaukseksi $n \approx 496.66$, joten Mari voi käydä syömässä 496 kertaa.

$$c) a_{496} = 6.70 \text{ (€)}$$

Hieman enemmän haastetta

12. Laske aritmeettiset summat:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{15} (2n-5)$$

$$\text{b) } \sum_{n=10}^{100} (5-8n)$$

Ratkaisu

$$\text{a) } a_1 = -3, a_{15} = 25$$

$$S_{15} = 15 \cdot \frac{-3+25}{2} = 165$$

$$\text{b) } a_{10} = -75, a_{100} = -795$$

$$S_{91} = 91 \cdot \frac{-75+(-795)}{2} = -39\,585$$

13. Osoita, että lukujono $a_n = 3n - 15$, $n = 1, 2, 3, \dots$ on aritmeettinen ja laske lukujonon 20 ensimmäisen jäsenen summa.

Ratkaisu

Koska kahden peräkkäisen jäsenen erotus $a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 15 - (3n - 15) = 3$ on vakio, kyseessä on aritmeettinen lukujono.

$$S_{20} = 20 \cdot \frac{a_1 + a_{20}}{2} = 20 \cdot \frac{-12 + 45}{2} = 330$$

14. Aritmeettisen jonon 5. jäsen on 16 ja 15. jäsen 56. Laske kyseisen jonon sadan ensimmäisen jäsenen summa.

Ratkaisu

$$a_5 = a_1 + 4d = 16, a_{15} = a_1 + 14d = 56$$

$$a_{15} - a_5 = 10d = 40, \text{ joten } d = 4.$$

Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 0$, sillä $a_5 = a_1 + 4d = 16$.

Yleinen jäsen on siis $a_n = 4n - 4$.

$$\text{Täten summaksi saadaan } S_{100} = 100 \cdot \frac{0 + (4 \cdot 100 - 4)}{2} = 19\,800.$$

15. Määritä aritmeettisen lukujonon yleisen jäsenen lauseke, kun erotusluku on -7 ja jonon 15 ensimmäisen jäsenen summa on -21 .

Ratkaisu

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \quad a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot (-7) = a_1 - 7n + 7$$

$$\text{Summa: } -21 = 15 \cdot \frac{a_1 + (a_1 - 7 \cdot 15 + 7)}{2} \Leftrightarrow -42 = 15 \cdot (2a_1 - 98) \Leftrightarrow a_1 = 47.6$$

$$\text{Täten } a_n = -7n + 54 \frac{3}{5}$$

16. Personal trainer teetti valmennettavallaan punnerrusharjoituksen. Siinä tehtiin ensin yksi etunojapunnerrus, jonka jälkeen käveltiin salin ympäri ja punnerrettiin kaksi kertaa. Jälleen kierrettiin salin ympäri ja punnerrettiin kolmesti jatkaen näin eteenpäin lisäten aina punnerrusten määrää yhdellä edeltävästä sarjasta. Harjoitus päättyi siihen, kun punnertaja ei saanut tehtyä yksittäistä punnerrussarjaansa loppuun asti lepäämättä välillä.

a) Kuinka monta punnerrusta treenin aikana tehtiin yhteensä, jos valmennettava jaksoi punnertaa maksimissaan 20 punnerrusta kerrallaan?

b) Monennella sarjalla ylittyisi 1000 punnerrusta treenin aikana?

Ratkaisu

$$\text{a) } S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$S_{20} = 20 \cdot \frac{1+20}{2} = 210$$

$$\text{b) } 1000 = n \cdot \frac{1+n}{2} \Leftrightarrow n^2 + n - 2000 = 0$$

Yhtälön ratkaisu voidaan selvittää kokeilemalla tai esimerkiksi Solve -komennolla.

$n \approx 44.22$, joten 1000 punnerrusta ylittyisi 45 :llä sarjalla.

