

# Tehtäviä

## Aloita näistä

### 1. Ratkaise yhtälö

a)  $4^x = 16$    b)  $3^x = 81$

Ratkaisu

a)  $x=2$

b)  $x=4$

### 2. Ratkaise yhtälö

a)  $(4^4)^x = 4^{16}$    b)  $36^x = 6^8$

Ratkaisu

a)  $4^{4x} = 4^{16}$ ,  $4x=16$ ,  $x=4$

b)  $6^{2x} = 6^8$ ,  $2x=8$ ,  $x=4$

### 3. Ratkaise yhtälö

a)  $5^{x+1} = 25$    b)  $2^x + 7 = 23$

Ratkaisu

a)  $5^{x+1} = 5^2$ ,  $x+1=2$ ,  $x=1$

b)  $2^x = 16$ ,  $x=4$

## Paranna osaamistasi

4. (Matematiikan yo-koe, kevät 2007, lyhyt oppimäärä, tehtävä 6)

a) Millä  $x$ :n arvolla on  $2^x=1$  ?

b) Ratkaise yhtälö  $2^{x^2-2}=1$

Ratkaisu

a)  $2^x=2^0, x=0$

b)  $2^{x^2-2}=2^0, x^2-2=0, x^2=2, x=\pm\sqrt{2}$

(Toisen asteen yhtälön ratkaisussa voi hyödyntää esimerkiksi laskimen Solve-toimintoa.)

5. (Matematiikan yo-koe, kevät 2002, pitkä oppimäärä, tehtävä 2a)

Millä  $x$ :n arvolla on  $e^x=1$  ?

Ratkaisu

$e^x=e^0, x=0$

6. Ratkaise yhtälö

a)  $3^{3x+15} = 42$

b)  $16^x = 2^{24}$

Ratkaisu

a)  $3^{3x}=27=3^3, 3x=3, x=1$

b)  $16^x=(2^4)^6, x=6$

7. Ratkaise yhtälö

a)  $2^x+2^x+2^x=96$

b)  $6^x+6^0+6^x+6^x+6^x=145$

Ratkaisu

a)  $3 \cdot 2^x=96, 2^x=32, x=5$

b)  $4 \cdot 6^x+1=145, 4 \cdot 6^x=144, 6^x=36, x=2$



## Hieman enemmän haastetta

8. Ratkaise yhtälö

a)  $2^x = 0.5$

b)  $0.75^x = \frac{16}{12}$

Ratkaisu

a)  $2^x = 2^{-1}, x = -1$

b)  $0.75^x = \frac{4}{3}, \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}, x = -1$

9. Ratkaise yhtälö  $\frac{2^x+4}{3} = \frac{8+2^x}{5}$

Ratkaisu

$$5(2^x+4) = 3(8+2^x)$$

$$5 \cdot 2^x + 20 = 24 + 3 \cdot 2^x$$

$$2 \cdot 2^x = 4$$

$$2^x = 2, x = 1$$

10. Tutki muotoa  $f(x) = a^x$  olevien kuvaajien muotoa ja selvitä, miten kantalukua vaikuttaa kuvaajien muotoon. Minkä pisteen kautta nämä kaikki kuvaajat kulkevat?

a)  $f(x) = 2^x$

b)  $f(x) = 1^x$

c)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d)  $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$

e)  $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

Ratkaisu

Jos kantaluku  $a > 1$ , niin kuvaaja on aidosti kasvava. Toisin sanoen  $x$ -koordinaatin kasvaessa funktion arvot nousee kohti ääretöntä.  $x$ -akselia vasemmalle mentäessä arvot pienenevät ja kuvaaja lähestyy  $x$ -akselia (funktion arvo nolaa), muttei kuitenkaan koskaan saavuta sitä.

Jos puolestaan kantaluku  $0 < a < 1$ , kuvaaja on aidosti vähenevä. Toisin sanoen  $x$ -koordinaatin pienentyessä funktion arvot kasvavat kohti ääretöntä ja  $x$ -akselia oikealle mentäessä kuvaaja lähestyy  $x$ -akselia, kuitenkin koskaan saavuttamatta sitä.

EkspONENTTIFUNKTIO saa ainoastaan positiivisia arvoja, joten sen kuvaaja on aina  $x$ -akselin yläpuolella. Kun  $x=0$ , funktion arvo on kantaluvusta riippumatta yksi, sillä mikä tahansa luku potenssiin nolla on yksi. Näin ollen jokainen kuvaajista kulkee pisteen  $(0,1)$  kautta. Huomataan myös, että kun  $x=1$ , funktion arvoksi saadaan kantaluku  $a$ , joten kukin funktioista kulkee myös pisteen  $(1,a)$  kautta.

a) ja e) -kohdissa kyseessä on aidosti kasvava funktio.

c) ja d) -kohdissa kyseessä on aidosti vähenevä funktio.

b) -kohdan funktio on vakiofunktio, vaakasuora suora, funktion arvo on kaikkialla yksi,  $f(x)=1$ .

**11.** Tiedetään, että eräiden matojen määrä kolminkertaistuu tunnissa. Tällä hetkellä niitä on 200 kappaletta.

a) Määritä funktio, joka kuvaa matojen määrää ajan,  $t$ , kuluttua.

b) Kuinka monta matoa on 4 tunnin kuluttua?

c) Kuinka monta matoa ehtii syntyä 5 minuutin aikana?

d) Paljonko matoja oli 2 tuntia sitten?

Ratkaisu

a) Tunnin kuluttua matoja on  $3^1 \cdot 200$ .

Kahden tunnin kuluttua matoja on  $3^2 \cdot 200$ .

Kolmen tunnin kuluttua matoja on  $3^3 \cdot 200$  ja niin edelleen. Siis ajan,  $t$ , kuluttua, matoja on  $3^t \cdot 200$  kappaletta. Funktio, joka kuvaa matojen määrää ajan,  $t$ , kuluttua on  $f(t) = 200 \cdot 3^t$ .

b)  $f(4) = 200 \cdot 3^4 = 16\,200$  (kpl)

c)  $f\left(\frac{5}{60}\right) = 200 \cdot 3^{1/12} \approx 219.175$

Siis matoja syntyy ensimmäisen viiden minuutin aikana 19 kpl lisää.

d)  $f(-2) = 200 \cdot 3^{-2} \approx 22.222$

Vastaus: Kaksi tuntia sitten matoja oli 22 kpl.

Samaan tulokseen päästään, jos merkitään matojen määrää 2 tuntia sitten  $m$ -kirjaimella ja ratkaistaan se yhtälöstä  $3^2 \cdot m = 200$ .

Huomautus. Matojen määrä vastauksessa on pyöristetty alaspäin lähimpään kokonaislukuun, sillä ei ole mahdollista, että madot syntyisivät vain osittain.

12. Olkoon  $f(x) = 5^x$ . Laske

$$-\frac{1}{4}(5(f(x+1)) - f(x+2)) - 4f(x)$$

Ratkaisu

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}[5(5^{x+1}) - 5^{x+2}] - 4 \cdot 5^x &= -\frac{1}{4}[5^{x+2} - 5 \cdot 5^{x+2} - 4 \cdot 5^x] = -\frac{1}{4}[-4 \cdot 5^{x+2} - 4 \cdot 5^x] = \frac{-4(5^{x+2} + 5^x)}{-4} \\ &= 5^{x+2} + 5^x \end{aligned}$$