

# Tehtäviä

## Aloita näistä

1. Ratkaise yhtälö. Anna vastaus sekä tarkkana arvona että kaksidesimaalisena likiarvona.

a)  $3^x=54$

b)  $5^x=27$

c)  $9^x=81$

Ratkaisu

a)  $x=\log_3(54) \approx 3.63$

b)  $x=\log_5(27) \approx 2.05$

c)  $x=2$

2. Mikä on

a) luvun 32 kaksikantainen logaritmi

b) luvun 625 viisikantainen logaritmi?

Kirjoita lauseke ja perustele vastauksesi logaritmin määritelmän avulla.

Ratkaisu

a)  $\log_2(32)=5$ , koska  $2^5=32$ .

b)  $\log_5(625)=4$ , koska  $5^4=625$

3. Ratkaise yhtälö. Anna vastaus sekä tarkkana arvona että kaksidesimaalisena likiarvona.

a)  $4^{3x}=85$

b)  $7 \cdot 6^x=111$

c)  $8^{x+2}=120$

Ratkaisu

a)  $3x=\log_4(85) \Leftrightarrow x=\frac{\log_4(85)}{3} \approx 1.07$

$$b) x = \log_6 \left( \frac{111}{7} \right) \approx 1.54$$

$$c) x+2 = \log_8 (120) \Leftrightarrow x = \log_8 (120) - 2 \approx 0.30$$

**4.** Todista, että

$$a) \log_a (1) = 0$$

$$b) \log_a (a) = 1$$

riippumatta kantaluvun  $a$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) valinnasta.

Ratkaisu

Logaritmin määritelmästä seuraa suoraan

$$a) a^0 = 1$$

$$b) a^1 = a$$

**5.** Ratkaise yhtälö. Anna vastaus sekä tarkkana arvona että kaksidesimaalisena likiarvona.

$$a) \frac{7^x}{4} = 16$$

$$b) 8^x - 2 = 18$$

$$c) 5^x + 5^x = 11$$

Ratkaisu

$$a) 7^x = 64, x = \log_7 (64) \approx 2.14$$

$$b) 8^x = 20, x = \log_8 (20) \approx 1.44$$

$$c) 5^x = \frac{11}{2}, x = \log_5 \left( \frac{11}{2} \right) \approx 1.06$$

## Paranna osaamistasi

6. Ratkaise yhtälö, jos se on mahdollista. Anna vastaus tarkkana arvona ja kaksidesimaalisena likiarvona.

a)  $4^{2x} = 15$

b)  $5^{x+1} = -5$

c)  $3^{x+2} + 4 = 9$

Ratkaisu

a)  $x = \frac{\log_4(15)}{2} \approx 0.98$

b) ei voi ratkaista, sillä negatiivisesta luvusta ei voi ottaa logaritmia

c)  $x = \log_3(5) - 2 \approx -0.54$

7. Minkä luvun

a) yhdeksänkantainen logaritmi on 3

b) viisikantainen logaritmi on 12

c) kymmenkantainen logaritmi on 4?

Ratkaisu

a)  $\log_9(x) = 3 \Leftrightarrow x = 9^3 = 729$

b)  $\log_5(x) = 12 \Leftrightarrow x = 5^{12} = 244\ 140\ 625$

c)  $\log_{10}(x) = 4 \Leftrightarrow x = 10^4 = 10\ 000$

8. Ratkaise yhtälö ja anna vastauksen tarkka arvo sekä kaksidesimaalinen likiarvo.

a)  $\frac{5^x}{4} + \frac{5^x}{8} - 3 = 0$

b)  $4 \cdot 8^x - 15 = 1$

Ratkaisu

a)  $x = \log_5(8) \approx 1.29$

b)  $x = \log_8(4) \approx 0.67$ , (Huomaa, että  $8^{2/3} = 4$ , joten vastaus,  $x = \frac{2}{3}$ , saadaan ilman logaritmiakin.)

9. Bakteerien määrä kasvaa tunnissa viisinkertaiseksi. Aluksi bakteerien määrä on 1000 kpl.

- a) Kuinka paljon bakteereja on kahden tunnin kuluttua?
- b) Kuinka paljon bakteereja on vuorokauden kuluttua?
- c) Miten pitkän ajan kuluessa bakteereja on miljoona?

Ratkaisu

a)  $1000 \cdot 5^2 = 25\,000$  kpl

b)  $1000 \cdot 5^{24} \approx 5.96 \cdot 10^{19}$  kpl

c)  $1000 \cdot 5^t = 1\,000\,000 \Leftrightarrow 5^t = 1000 \Leftrightarrow t = \log_5(1000) \approx 4.292 \text{ h} \approx 4 \text{ h } 18 \text{ min}$

## Hieman enemmän haastetta

**10.** Säästötillille talletettu rahasumma kasvaa 2 % korkoa vuosittain. Tilille talletetaan 10 000 euroa. Kuinka monen vuoden kuluttua tilin saldo on tuplaantunut?

Ratkaisu

Saadaan yhtälö  $20\,000 = 10\,000 \cdot 1.02^t$ , jossa  $t$  kuvaa vuosia.

Tästä ratkaisuksi saadaan  $t = \log_{1.02}(2) \approx 35.003$ .

Vastaus: Tilin saldo on tuplaantunut 35 vuoden kuluttua.

**11.** Auton arvo alenee 15 % vuodessa. Uuden auton hinta on 35 000 euroa. Kuinka monen vuoden kuluttua auton arvo on enää 25 000 euroa?

Ratkaisu

Saadaan yhtälö  $25\,000 = 35\,000 \cdot 0.85^t$ , jossa  $t$  kuvaa vuosia.

Tästä ratkaisuksi saadaan  $t = \log_{0.85}\left(\frac{25}{35}\right) \approx 2.070$ .

Vastaus: Auton arvo on pudonnut 25 000 euroon reilussa kahdessa vuodessa.

**12.** Radioaktiivisen aineen määrän puolittumista kuvaa aineen puoliintumisaika. Erään isotoopin puoliintumisaika on 24 minuuttia. Kuinka pitkän ajan kuluttua ainetta on jäljellä 4 % alkuperäisestä määrästä?

Ratkaisu

Saadaan yhtälö  $m \cdot 0.5^t = 0.04 m$ , jossa  $m$  kuvaa aineen määrää alussa ja  $t$  puoliintumisaikaa.

Ratkaisuksi saadaan  $t = \log_{0.5}(0.04) \approx 4.644$ . Aika minuutteina on  $4.644 \cdot 24 \text{ min} \approx 111.5 \text{ min}$ .

Vastaus: Ainetta on jäljellä 4 % alkuperäisestä määrästä 1h 52 min kuluttua.