

Tehtäviä

Aloita näistä

1. Laske geometrisen lukujonon 2, 10, 50, 250,... kymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

Ratkaisu

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{1-5^{10}}{1-5} = 4\,882\,812$$

2. Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen on -100 ja suhdeluku -2. Laske jonon kuuden ensimmäisen jäsenen summa.

Ratkaisu

$$S_6 = -100 \cdot \frac{1-(-2)^6}{1-(-2)} = 2100$$

3. Laske geometrisen summan $16 + 1.05 \cdot 16 + 1.05^2 \cdot 16 + \dots + 1.05^{12} \cdot 16$ arvo.

Ratkaisu

$$S_{13} = 16 \cdot \frac{1-1.05^{13}}{1-1.05} \approx 283.41$$

4. Mikan tilillä on 350 euroa. Tilin vuotuinen korkoprosentti on 2 %. Jos Mika ei käytä tilin rahoja

a) Kuinka paljon tilillä on rahaa 8 vuoden päästä?

b) Laske tilin saldon muodostaman geometrisen jonon summa ensimmäisten viiden vuoden ajalta.

Ratkaisu

$$a) a_n = 350 \cdot 1.02^{n-1}$$

$$a_8 = 350 \cdot 1.02^7 \approx 402.04 \text{ (€)}$$

$$b) S_5 = 350 \cdot \frac{1-1.02^5}{1-1.02} \approx 1821.41 \text{ (€)}$$

Paranna osaamistasi

5. Kuinka monta geometrisen lukujonon $1, -3, 9, -27, \dots$ jäsentä on laskettava yhteen, että summa on -1640 ?

Ratkaisu

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$
$$-1640 = 1 \cdot \frac{1-(-3)^n}{1-(-3)} \Leftrightarrow -6560 = 1-(-3)^n \Leftrightarrow (-3)^n = 6561 \Leftrightarrow n=8$$

6. (Matematiikan yo-koe, syksy 2003, lyhyt oppimäärä, tehtävä 7)

Geometrisen jonon suhdeluku on 4 ja kymmenen ensimmäisen termin summa 3844775. Määritä jonon ensimmäinen termi. Mikä on jonon kymmenes termi?

Ratkaisu

$$S_{10} = a_1 \cdot \frac{1-4^{10}}{1-4} = 3\,844\,775 \Leftrightarrow a_1 = 11$$

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 11 \cdot 4^9 = 2\,883\,584$$

7. Geometrisen lukujonon ensimmäiset jäsenet ovat $\frac{1}{5}, 1, 5, 25, 125, \dots$

Kuinka monta jonon jäsentä on laskettava yhteen, jotta summaksi saadaan yli 10000?

Ratkaisu

$$S_n = \frac{1}{5} \cdot \frac{1-5^n}{1-5} = -\frac{1}{20} \cdot (1-5^n) = 10\,000 \Leftrightarrow 5^n = 200\,001$$

Kokeilemalla saadaan, että jäseniä on laskettava yhteen vähintään 8, jotta summa on yli 10 000.

8. Laske geometrisen summan $\frac{1}{3} + 3 + 9 + \dots + 1594323$ arvo.

Ratkaisu

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot 3^{n-1}$$

Selvitetään, montako jäsentä summaan tulee laskea.

$$1\,594\,323 = \frac{1}{3} \cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow 3^{n-1} = 4\,782\,969 \Leftrightarrow n-1 = \log_3(4\,782\,969) = 14 \Leftrightarrow n = 15$$

$$S_{15} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-3^{15}}{1-3} \approx 2\,391\,484.3$$

Hieman enemmän haastetta

9. Ilmoita geometrinen summa summamerkin avulla.

a) $1+2+4+8+16+32$

b) $1-3+9-27$

Ratkaisu

$$\text{a) } S_6 = \sum_{n=1}^6 (2^{n-1})$$

$$\text{b) } S_4 = \sum_{n=1}^4 ((-3)^{n-1})$$

10. Laske summat:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{10} \left(\frac{1}{5^n}\right) \quad \text{b) } \sum_{n=3}^{10} (4^n) \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{10} (2n+2)$$

Ratkaisu

Tapauksissa a) ja b) kyseessä on geometriset summat, tapauksessa c) kyseessä on aritmeettinen summa.

a) $S_{11} \approx 1.25$

b) $S_8 = 1\,398\,080$

c) $S_{10} = 130$

11. Olipa kerran 2000 -luvun alkupuoliskolla hyvä tattu vuosi. Tattikauden ollessa parhaimmillaan sienestäjä tienasi päivässä 1000 euroa. Tästä eteenpäin joka päivä tattiin myyntitulot pienenevät 5 %.

a) Kuinka paljon sienestäjä sai tateista 2 viikon kuluttua?

b) Kuinka paljon sienestäjä sai rahaa yhteensä 2 viikon aikana?

c) Kuinka kauan satokausi kesti sienestäjän kannalta kannattavana eli miten pitkän ajan päästä tateista saatu palkkio oli alle 100 euroa?

Ratkaisu

$$a) a_{14} = 1000 \cdot 0.95^{13} \approx 513.34 \text{ (€)}$$

$$b) S_{14} = 1000 \cdot \frac{1 - 0.95^{14}}{1 - 0.95} \approx 10\,246.50 \text{ (€)}$$

$$c) a_n = 1000 \cdot 0.95^{n-1} < 100 \Leftrightarrow 0.95^{n-1} < 0.1$$

Tästä kokeilemalla saadaan, että $0.95^{45} < 0.1$, joten $n-1=45 \Leftrightarrow n=46$. Täten satokausi kesti kannattavana 45 päivää.

12. (Matematiikan yo-koe, syksy 2003, pitkä oppimäärä, tehtävä 12 a)

Isä tallettaa poikansa tilille joka kuukauden alussa 200 € vuodenvaihteessa tapahtuneesta syntymästä alkaen. Tilille maksetaan 1.5 % vuotuista korkoa, joka liitetään pääomaan aina vuoden lopussa. Kuinka paljon rahaa tilillä on, kun poika täyttää 18 vuotta?

Ratkaisu

$$q = 1.015$$

$$\text{Korko 1. vuosi } \frac{200 \cdot 0.015 \cdot (12 + 11 + \dots + 1)}{12} = 19.50 \text{ (€)}$$

$$\text{Pääoma 1. vuoden jälkeen } K = 12 \cdot 200 + 19.50 = 2419.50 \text{ (€)}$$

$$\text{Pääoma 2. vuoden jälkeen } (1+q)K$$

$$\text{Pääoma 3. vuoden jälkeen } (1+q+q^2)K \text{ jne.}$$

Kun poika täyttää 18 vuotta, on tilillä rahaa

$$(1+q+q^2+\dots+q^{17})K = K \cdot \frac{1-q^{18}}{1-q} = 2419.50 \cdot \frac{1-1.015^{18}}{1-1.015} \approx 49\,574 \text{ (€)}$$