

Tehtäviä

Aloita näistä

1. Määritä lukujonon kuusi ensimmäistä jäsentä, kun

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = 3a_{n-1} - 2, n=2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Ratkaisu

4, 10, 28, 82, 244, 730

2. Määritä lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä ja niiden summa, kun

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = -2a_{n-1} + 5, n=2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Ratkaisu

Lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä ovat 1, 3, -1, 7, -9 ja niiden summa $S_5 = 1$.

3. Fibonaccin lukujonon seuraava jäsen saadaan laskemalla yhteen kaksi edellistä jonon jäsentä. Kaksi ensimmäistä jonon jäsentä on ykkösiä.

- Kirjoita rekursiokaava Fibonaccin lukujonolle.
- Laske lukujonon 10 ensimmäistä jäsentä rekursiokaavan avulla.

Ratkaisu

$$\text{a) } \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n=3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

b) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

4. Määritä lukujonon rekursiokaava, kun

- Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$ ja seuraava jäsen saadaan kertomalla edeltävä jäsen luvulla 5 ja vähentämällä tästä tulosta luku 4.
- Lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat 1, 2 ja 3. Seuraavat jäsenet saadaan kolmen edeltävän jäsenen summana.

Ratkaisu

$$\text{a) } \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 5a_{n-1} - 4, n=2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, n=4, 5, 6, \dots \end{cases}$$

Paranna osaamistasi

5. Määritä lukujonon viides jäsen, kun
$$\begin{cases} a_1=3 \\ a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+1, n=2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Ratkaisu

$$a_5 = \frac{41}{27} = 1 \frac{14}{27}$$

6. Määritä lukujonon kahdeksas jäsen, kun

$$\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=3 \\ a_n=a_{n-1} \cdot a_{n-2}, n=3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

Ratkaisu

$$a_8 = 408\ 146\ 688$$

7. Määritä lukujonon 17. jäsen hyödyntämällä taulukkolaskentaohjelmaa, kun

$$\begin{cases} a_1=5 \\ a_n=3a_{n-1}-8, n=2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Ratkaisu

$$a_{17} = 43\ 046\ 725$$

8. Erään lukujonon peräkkäiset jäsenet saadaan kahden edeltävän jäsenen keskiarvona. Kaksi ensimmäistä jäsentä ovat $a_1=1$ ja $a_2=2$.

- Määritä rekursiokaava.
- Laske jonon kuusi ensimmäistä jäsentä.
- Millainen lukujono olisi kyseessä, jos ensimmäiset kaksi jäsentä olisivat molemmat ykkösiä?

Ratkaisu

$$\text{a) } \begin{cases} a_1=1 \\ a_2=2 \\ a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}, n=3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

b) $1, 2, \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}, \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}, \frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}, \frac{27}{16} = 1\frac{11}{16}$

c) Kyseessä olisi vakiojono $1, 1, 1, \dots$

Hieman enemmän haastetta

9. Olkoon (a_n) rekursiivisesti määritelty lukujono, jolle pätee

$$\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=2a_n-1, n=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Määritä kyseisen lukujonon analyttinen muoto eli yleisen jäsenen lauseke.

Ratkaisu

Havaitaan, että

$$a_1=2=2^0+1$$

$$a_2=3=2^1+1$$

$$a_3=5=2^2+1$$

$$a_4=9=2^3+1 \text{ jne.}$$

$$\text{Siis } a_n=2^{n-1}+1, n=1, 2, 3, \dots$$

Todistus.

Sijoittamalla analyttiseen muotoon luku 1, saadaan sama tulos, minkä rekursiokaavakin antaa

$$a_1=2^{1-1}+1=2 \text{ ja sijoittamalla rekursiokaavaan } a_n \text{ :n lauseke saadaan}$$

$$a_{n+1}=2 \cdot (2^{n-1}+1)-1=2^n+1.$$

Siis nämä esitystavat vastaavat toisiaan.

10. Rekursiivisesti määritellylle lukujonolle on voimassa $a_{n+1}=3-(a_n)^2+\frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Mikä on jonon

jäsen a_5 , kun $a_0=2$?

Ratkaisu

$$a_5=\frac{1199}{256}=4\frac{175}{256}$$

11. Erään yliopiston ainevaihtoehdoksi otettiin mukaan matematiikka eräänä syksynä.

Yliopistossa matematiikan opiskelun aloittaneista 60 opiskelijasta 40 % ei selviydy opinnoistaan toivotulla tavalla ja he keskeyttävät opintonsa. Joka syksy uusia opiskelijoita otetaan sisään 60 kpl ja jokaisena keväänä sama prosenttiosuus kaikista yliopiston matematiikan opiskelijoista päätyy vaihtamaan alaa riippumatta siitä, monen vuoden opiskelija on kyseessä.

a) Opiskelijoiden määrä lukuvuoden alussa (syksyllä) muodostaa rekursiivisen lukujonon. Muodosta tätä lukujonoa kuvaava rekursiokaava.

b) Kuinka paljon matematiikan opiskelijoita on yliopistossa neljäntenä syksynä, kun kukaan yliopiston opiskelijoista ei ole vielä ehtinyt valmistua laitokselta?

Ratkaisu

$$a) \begin{cases} a_1 = 60 \\ a_n = 0.60 \cdot a_{n-1} + 60, \quad n=2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

$$b) a_1 = 60, a_2 = 96, a_3 = 117.6, a_4 = 130.56$$

Vastaus: Matematiikan opiskelijoita on yliopistossa neljäntenä syksynä 130 kappaletta.

12. Keksi rekursiokaava jonon yleiselle jäsenelle, kun $a_1 = 2$, $a_2 = -4$, $a_3 = 14$, $a_4 = -40$, $a_5 = 122$ ja $a_6 = -364$.

Ratkaisu

$$a_n = -3a_{n-1} + 2, \quad n=2, 3, 4, \dots$$