Syksyn 2015 Pitkän matematiikan YO−kokeen TI−Nspire CAS −ratkaisut

Tekijät: Olli Karkkulainen

Ratkaisut on laadittu TI−Nspire CAS −tietokoneohjelmalla käyttäen **Muistiinpanot** −sovellusta. Kaavat ja laskut on kirjoitettu Math −ruutuihin. Math −ruutu sisältää kaikki samat laskutoiminnot kuin laskinsovelluskin. Math −ruutujen laskuja ja lausekkeita voi jälkikäteen muokata ja ovat siten dynaamisia, mikä helpottaa ratkaisun hahmottelua ja muokkaamista.

− Math −ruutu listätään ***Lisää*** −valikon kautta tai pikanäppäimellä ***CTRL + M***

− Math −ruutu näyttää tältä:$\mathbf{f}(x):=a\cdot x^{b}$ ja tämän derivaatta $\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x)) \blacktriangleright a\cdot b\cdot x^{b-1}$

− Laskutoimitus lasketaan painamalla ***Enter.*** Syöte on sininen ja tulos on vihreä.

− Kun kirjoitetaan vain kaava, siirretään kursori ruudun ulkopuolelle ja kaava säilyy mustana.

− Math −ruudun määrityksiä voidaan muuttaa valitsemalla 5:Math−ruudun asetukset tai klikkaamalla hiiren kakkospainiketta ruudun päällä.

Näiden malliratkaisujen tavoitteena on havainnolistaa TI−Nspire CAS −tietokoneohjelman käyttöä sähköisen koesisällön tuottamisessa. Lisätietoja **www.nspire.fi**

Tehtävä 1

a) Sijoitetaan yhtälön juuri $x = 2015$ yhtälöön ja ratkaistaan vakio a yhtälön avulla

$a\cdot x = 2015+a$

$a\cdot 2015 = 2015+a \quad \|-a$

$2014a = 2015 \quad \|:2014$

$a = \frac{2015}{2014}$ tai suoraan solvella

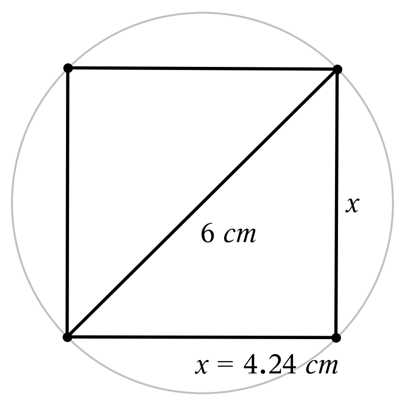
$\mathrm{solve}(a\cdot x=2015+a,a)|x=2015 \blacktriangleright a=\frac{2015}{2014}$

b) Olkoon neliön sivu x. Pythagoraan lauseen mukaan $x^2+x^2 = 6^2$, josta

$\mathrm{solve}(x^2+x^2=6^2,x)|x>0 \blacktriangleright x=3\cdot\sqrt{2}$.

Tällöin kysytty piiri on $12\sqrt{2}$.

c) Suurin luku on $\frac{2}{2} = 1$ ja pienin $\frac{-1}{2}$.



Tehtävä 2

a) Suoran vakiotermi on 0 ja kulmakerroin $4/3$, joten suoran yhtälö on $y = \frac{4}{3}x$.

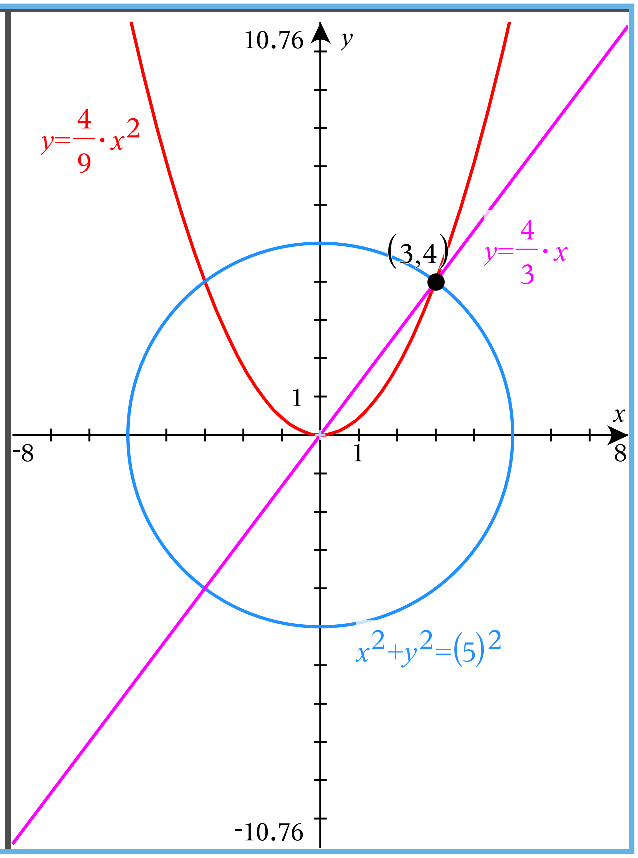
b) Ympyrän on pisteen $(3,4)$ etäisyys origosta, eli $\sqrt{3^2+4^2} \blacktriangleright 5$, eli ympyrän yhtälö on $x^2+y^2 = 25$.

c) Mahdollisen paraabelin yhtälö on muotoa $y = a\cdot x^2$. Paraabeli kulkee pisteen $(3,4)$ kautta, josta

$\text{solve}\left(4=a\cdot 3^2,a\right) \blacktriangleright a=\frac{4}{9}$, eli yhtälö on

$y = \frac{4}{9}x^2$.

Tarkistus piirtämällä ensin jokin ympyrä, suora ja paraabeli, ja asettamalla ne kulkemaan kyseisen pisteen kautta tarttumalla kuvaajiin.



Tehtävä 3

a) Mittakaava on karttapituuden suhde todelliseen, joten

$\frac{1}{20000}=\frac{17.5\_cm}{x}$, josta x on

$\text{solve}\left(\frac{1}{20000}=\frac{17.5\cdot\_cm}{x},x\right) \blacktriangleright x=3500.\cdot\_m$

b) Olkoon kuution sivu s ja kysytty pinta−ala x. Tällöin tilavuus on $s^3 = 7.0\ \text{l}$ ja tahkon pinta−ala $x = s^2$

$\text{solve}\left(s^3=7.\cdot\_l \text{ and } x=s^2,x,s\right) \blacktriangleright x=0.036593\cdot\_m^2 \text{ and } s=0.191293\cdot\_m$

$0.036593\cdot\_m^2 \blacktriangleright \_cm^2 \blacktriangleright 365.93\cdot\_cm^2$

Vastaus

a) 3500 m ja b) 366 cm^2

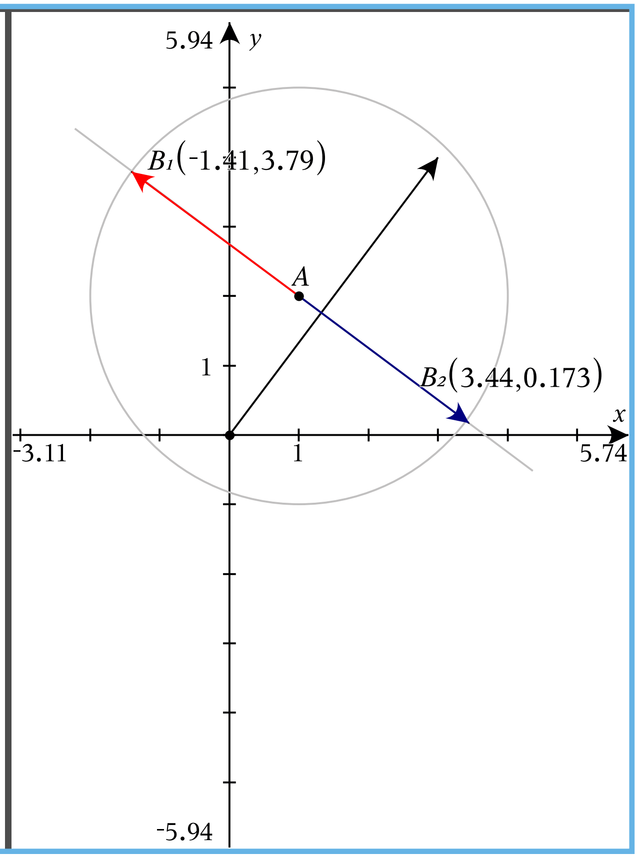
Tehtävä 4

Olkoon $\overline{OB} = [x,y]$. Tällöin $\overline{AB} = [x-1, y-2]$.

Koska vektorin $\overline{AB}$ pituus on 3 ja se on kohtisuorassa vektorin $[3,4]$ kanssa, saadaan yhtälöt

$$\text{solve}\left(\begin{cases}\text{dotP}([x-1 \quad y-2],[3 \quad 4])=0\\ \text{norm}([x-1 \quad y-2])=3\end{cases}, x, y\right)$$

$$\blacktriangleright\ x=\frac{-7}{5} \text{ and } y=\frac{19}{5} \text{ or } x=\frac{17}{5} \text{ and } y=\frac{1}{5}$$



Vastaus

Saadaan kaksi vaihtoehtoa $\left(-\frac{7}{5}, \frac{19}{5}\right)$ ja $\left(\frac{17}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Tehtävä 5. Tapa I

Olkoon x puolet kysytyn jänteen pituudesta. Kuvassa a on sama kuin pisteen $(2,1)$ etäisyys origosta, eli $\sqrt{2^2+1^2} \blacktriangleright \sqrt{5}$.

Pythagoraan lauseesta saadaan $r^2 = a^2+x^2$, josta x solvella

$$\text{solve}\left(4^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+x^2, x\right) | x>0 \ \blacktriangleright\ x=\sqrt{11}$$

Vastaus: $2\sqrt{11}$

Tapa II

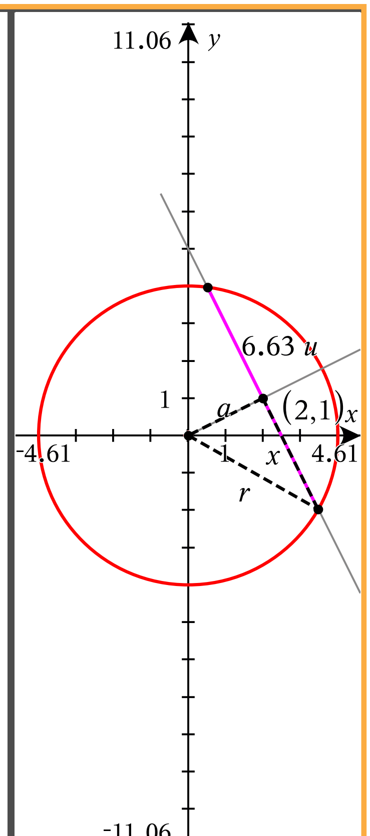
Lasketaan suoran ja ympyrän leikkauspisteet:

$$\text{solve}\left(\begin{cases}y-1=-2\cdot(x-2)\\ x^2+y^2=16\end{cases}, \{x,y\}\right)$$

$$\blacktriangleright\ x=\frac{-\left(\sqrt{55}-10\right)}{5} \text{ and } y=\frac{2\cdot\sqrt{55}+5}{5} \text{ or } x=\frac{\sqrt{55}+10}{5} \text{ and } y=\frac{-\left(2\cdot\sqrt{55}-5\right)}{5}$$

ja lasketaan näiden pisteiden välimatka

$$\sqrt{\left(\frac{-\left(\sqrt{55}-10\right)}{5}-\frac{\sqrt{55}+10}{5}\right)^2+\left(\frac{2\cdot\sqrt{55}+5}{5}-\frac{-\left(2\cdot\sqrt{55}-5\right)}{5}\right)^2} = 2\cdot\sqrt{11}$$



Tehtävä 6

Kyseessä on toistokoe, jossa yksittäisen onnistumisen todennäköisyys on $p = 90\ \%$.

a) Yksi epäonnistuu=kolme onnistuu, joten $\text{binomPdf}(4,90\%,3) \blacktriangleright 0.2916$

b) Odotusarvo onnistuneille on toistojen määrä n kertaa yksittäisen onnistumisen todennäköisyys, eli $4 \cdot 90\% \blacktriangleright 3.6$

c) Jotta odotusarvo olisi 10, on oltava $n \cdot 90\% = 10$, eli $n = \frac{10}{90\%} \approx 11.1111$

Vastaus

a) Noin 29 % b) Noin 3.6 ja c) Vähintään 12 kertaa

Tehtävä 7

Ison kolmion korkeus h on Pythagoraan lauseen mukaan

$\text{solve}(h^2+h^2=a^2,h)|h>0 \text{ and } a>0 \blacktriangleright h=\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2} \text{ and } a>0$

Pienen kolmion pinta−ala on tällöin

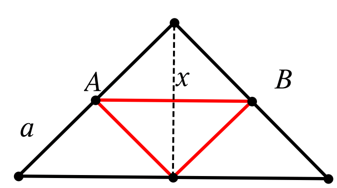
$\mathbf{ala}(x):=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x\cdot\left(\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}-x\right)$, jossa x voi olla välillä $0\leq x\leq\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}$.

Ratkaistaan alan derivaattafunktio ja sen nollakohdat

$\frac{d}{dx}(\mathbf{ala}(x)) \blacktriangleright \frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}-2\cdot x$, $\quad \text{zeros}\left(\frac{d}{dx}(\mathbf{ala}(x)),x\right) \blacktriangleright \left\{\frac{a\cdot\sqrt{2}}{4}\right\}$

Jatkuvan funktion suurin arvo on derivaatan nollakohdassa tai päätepisteissä. Tässä tilanteessa derivaatan nollakohta ainoa on mahdollinen, ja siinä arvo on $\mathbf{ala}\left(\frac{a\cdot\sqrt{2}}{4}\right) \blacktriangleright \frac{a^2}{8}$

Vastaus $\frac{a^2}{8}$



Tehtävä 8

Olkoon tahti alussa a (tonnia/vuosi). 50−vuoden aikana hiiltä louhitaan tällöin $50a$ tahdin ollessa vakio. Mikäli määrä kasvaa 2.5% vuodessa, n:ssä vuodessa hiiltä louhitaan $\sum_{i=1}^{n-1} \left(a \cdot (1+(2.5)\%)^i\right)$. Vuosien määrä voi olla maksimissaan

$$\text{solve}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(a \cdot (1+(2.5)\%)^i\right) = 50 \cdot a, n\right) \blacktriangleright n=32.841$$

Vastaus

Kivihiili loppuisi vuonna 2047.

Tehtävä 9

Koko omenan tilavuus $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

$$\text{Vomena} := \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = \frac{500 \cdot \pi}{3}$$

Pythagoraan lauseesta $a = \sqrt{5^2-1^2} = \sqrt{24}$.

Poisleikatun osan tilavuus saadaan käyrän

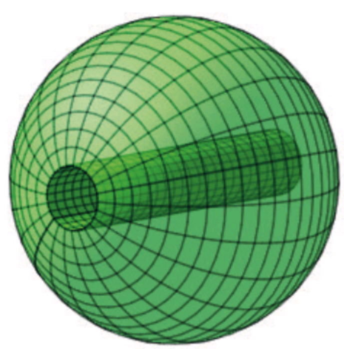
$$\mathbf{f}(x) := \begin{cases} \sqrt{5^2-x^2}, & x<-\sqrt{24} \\ 1, & -\sqrt{24} \le x \le \sqrt{24} \\ \sqrt{5^2-x^2}, & x>\sqrt{24} \end{cases}$$ pyörähtäessä.

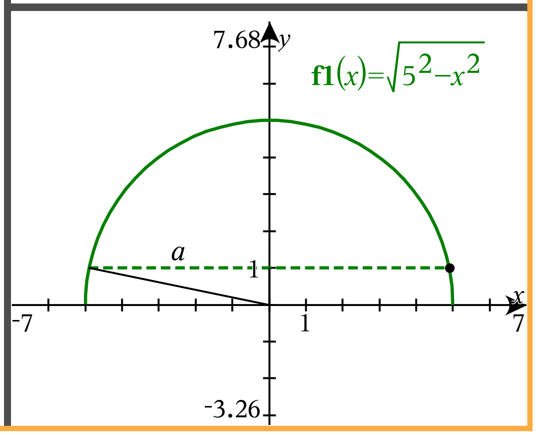
Tilavuudeksi saadaan

$$\text{Vleikattu} := \pi \cdot \int_{-5}^{5} (\mathbf{f}(x))^2 \, dx \approx 31.0996$$

Prosenteissa $\frac{\text{Vleikattu}}{\text{Vomena}} \cdot 100 \approx 5.93959$

Vastaus: 5.9 %





Tehtävä 10

a) Koska jono on geometrinen $b = q \cdot a$ ja $c = q^2 \cdot a$. Pythagoraan lauseesta $c^2 = a^2 + b^2$ ja edelleen $\text{solve}\left(\left(q^2 \cdot a\right)^2 = (q \cdot a)^2 + a^2, q\right) | q>0 \blacktriangleright q = \frac{\sqrt{2 \cdot \left(\sqrt{5}+1\right)}}{2}$

b) Olkoon termien välinen erotus d, jolloin $b = a+d$, $c = a+2d$. Pythagoraan lauseesta $\text{solve}\left((a+2 \cdot d)^2 = a^2 + (a+d)^2, a\right) | d>0 \text{ and } a>0 \blacktriangleright a = 3 \cdot d \text{ and } d>0$. Tällöin sivut ovat $3d$, $4d$ ja $5d$. Kysytty suhde on täten $3{:}4{:}5$.

Vastaus

a) $q = \frac{\sqrt{2 \cdot \left(\sqrt{5}+1\right)}}{2}$ b) $3{:}4{:}5$

Tehtävä 11

a) Luku on jaollinen luvulla kolme, mikäli numeroiden summa on kolmella jaollinen. Numeroiden summa on $1+2+n+3+4+n+5+6+7+n+8+9+n \blacktriangleright 4 \cdot n + 45$. 45 on jaollinen kolmella. $4n$ on jaollinen kolmella, mikäli n on 0, 3, 6 tai 9.

b) Luku on jaollinen kuudella, mikäli se on jaollinen kolmella ja kahdella. Luku on jaollinen kahdella, mikäli sen viimeinen numero on parillinen. Molemmat ehdot täyttävät $n = 0$ ja $n = 6$

c) Numeroiden summan $4 \cdot n + 45$ täytyy olla yhdeksällä jaollinen. 45 on yhdeksällä jaollinen. $4n$ on yhdeksällä jaollinen, mikäli n on 9 tai 0.

Vastaus

a) 0, 3, 6 tai 9.

b) 0 tai 6

c) 0 tai 9

Tehtävä 12 Tapa I

$p(x):=2\cdot x^3+a\cdot x^2-4\cdot x+b$ sen kaksi nollakohtaa ovat 1 ja -3, joten

$p(1)=0 ▸ a+b-2=0$

$p(-3)=0 ▸ 9\cdot a+b-42=0$

Muodostetaan näistä yhtälöpari, josta ratkaistaan a ja b:

$\text{solve}\left(\begin{cases} a+b-2=0 \\ 9\cdot a+b-42=0 \end{cases},a,b\right) ▸ a=5 \text{ and } b=-3$

$2\cdot x^3+a\cdot x^2-4\cdot x+b|a=5 \text{ and } b=-3 ▸ 2\cdot x^3+5\cdot x^2-4\cdot x-3$

$\text{solve}\left(2\cdot x^3+5\cdot x^2-4\cdot x-3=0,x\right) ▸ x=-3 \text{ or } x=\frac{-1}{2} \text{ or } x=1$

Tapa II

Polynomi on muotoa $P(x) = (c\cdot x+d)\cdot(x-1)\cdot(x+3)$ ja sen kaksi nollakohtaa ovat 1 ja -3

Avataan sulut $\text{expand}((c\cdot x+d)\cdot(x-1)\cdot(x+3)) ▸ c\cdot x^3+2\cdot c\cdot x^2+d\cdot x^2-3\cdot c\cdot x+2\cdot d\cdot x-3\cdot d$

Havaitaan, että on oltava $c = 2$ ja $d = 1$.

Polynomin kolmas nollakohta on tekijän $(c\cdot x+d) = 2x+1$ nollakohta, eli $2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1/2$.

Vastaus: Polynomin nollakohdat ovat 1, -3 ja $-\frac{1}{2}$.

Tehtävä 13

a) Esimerkiksi lukujono $a_n=(-1)^n$ on rajoitettu, sillä $|a_n|=1$, mutta jono ei suppene sillä $|a_{i+1}-a_i|=2$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$.

b) Esimerkiksi $a_n=-n$. Jono on vähenevä, koska $a_{i+1}-a_i = -(i+1)-(-i) = -1$. Jono ei ole hajaantuva, koska $\lim_{n\to\infty}(a_n)=-\infty$.

c) Ehto toteutuu, kun p on esimerkiksi 2, eli $f(x):=x^{-2}$. Integraalifunktiot ovat $\int f(x)\, dx = \frac{-1}{x}+C$ ja $\int \sqrt{f(x)}\, dx|x>0 = \ln(x)+D$. Raja−arvo $\lim_{a\to\infty}\left(\int_1^a f(x)\, dx\right) = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{-1}{a}-\left(\frac{-1}{1}\right)\right) = 1$, mutta raja−arvo $\lim_{a\to\infty}\left(\int_1^a \sqrt{f(x)}\, dx\right) = \lim_{a\to\infty}(\ln(a)-\ln(1)) = \infty$. Valinta $p = 2$ toteuttaa siis annetut ehdot.

Tehtävä 14

a) Kyseisen suoran suuntavektori on $[2,3,7]$ ja pituus $\text{norm}([2 \ \ 3 \ \ 7]) \blacktriangleright \sqrt{62}$.
Tällöin

$$\cos(\alpha) = \frac{[2,3,7]\cdot[1,0,0]}{\sqrt{62}\cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{62}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{[2,3,7]\cdot[0,1,0]}{\sqrt{62}\cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{62}}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{[2,3,7]\cdot[0,1,0]}{\sqrt{62}\cdot 1} = \frac{7}{\sqrt{62}}$$

b) Edellisten neliöiden summa $\left(\frac{2}{\sqrt{62}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{62}}\right)^2+\left(\frac{7}{\sqrt{62}}\right)^2 = 1$

c) $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{62}}\right) \approx 75.3°$, $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{62}}\right) \approx 67.6°$ ja $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{62}}\right) \approx 27.3°$.

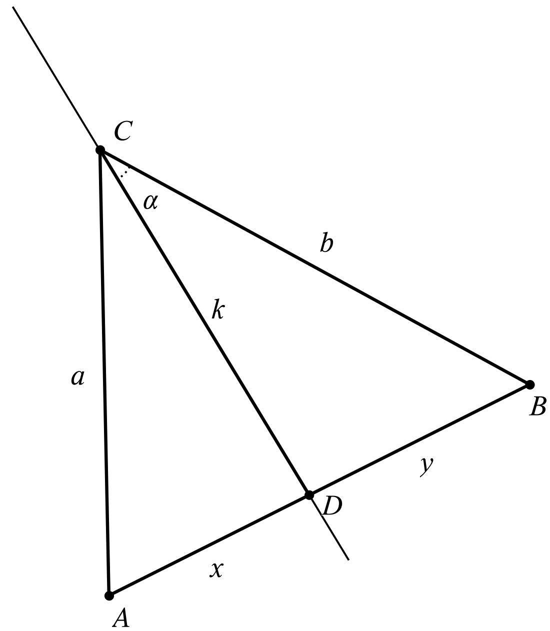
d) Ehdot toteuttavan suoran eräs suuntavektori on $[a,b,c]$ ja sen pituus on
$\text{norm}([a \ \ b \ \ c]) \blacktriangleright \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Suuntakosinien neliö on $\cos(\alpha)^2+\cos(\beta)^2+\cos(\gamma)^2$

$$= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1$$

Tehtävä 15

a) Mikäli $a = b$, kolmio on tasakylkinen.
Koska kolmio on tasakylkinen, $x = y$.
Pythagoraan lauseesta saadaan
$k = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a \cdot b - x \cdot y}$.



b) Olkoon kulmanpuolittajan α kosini c.
Saadaan kaksi kosinilausetta, joista

$\begin{cases} y^2 = k^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot k \\ x^2 = k^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot k \end{cases}$, joista $\dfrac{y^2 - k^2 - b^2}{b} = \dfrac{x^2 - k^2 - a^2}{a} \; \| \cdot b$.

$$y^2 - k^2 - b^2 = \frac{b}{a} \cdot \left(x^2 - k^2 - a^2\right)$$

Kulmanpuolittajalauseen mukaan $y/x = b/a$, joten

$$y^2 - k^2 - b^2 = \frac{y}{x} \cdot \left(x^2 - k^2 - a^2\right) \; \| \cdot x$$

$$xy^2 - xk^2 - xb^2 = y \cdot x^2 - y \cdot k^2 - y \cdot a^2$$

$(y - x) \cdot k^2 = y \cdot x^2 - y \cdot a^2 - x \cdot y^2 + x \cdot b^2 \; \| x \neq y$, sijoitetaan $y \cdot a = x \cdot b$

$$k^2 = \frac{y \cdot x^2 - y \cdot a^2 - x \cdot y^2 + x \cdot b^2}{y - x} = \frac{y \cdot x^2 - x \cdot b \cdot a - x \cdot y^2 + y \cdot a \cdot b}{y - x} = -(x \cdot y - a \cdot b)$$

$$k = \sqrt{ab - xy}$$