Kevään 2016 Lyhyen matematiikan YO–kokeen TI–Nspire CAS –ratkaisut

Nämä ratkaisut tehty alusta loppuun TI–Nspire CX CAS –ohjelmistolla ja tallennettu lopuksi PDF –muotoon. Tarkoituksena on havainnollistaa, miten tietokoneella voidaan rakentaa lyhyen ja pitkän matematiikan vastauksia.

TI–Nspire on matematiikan ja luonnontieteiden ohjelmisto, jolla opiskelijat tulevissa Digabi ja Abitti –kokeissa voivat laatia koko vastauksensa kätevästi yhden ohjelman sisällä. Mikä tärkeintä, eri sovelluksissa tehdyt osiot linkittyvät automaattisesti yhteen, nopeuttaen ja selkeyttäen vastaamisprosessia. Muokattaessa esim. funktion lauseketta tekstin seassa, muuttuu funktion kuvaaja automaattisesti.

Koevastauksen laatimisessa voidaan esimerkiksi hyödyntää.

- Muistiinpanot –sovellusta (perustelut, kaavat, laskut)
- Kuvaajat –sovellusta (kuvaajat ja niiden tulkinta, analyyttisen geometrian ongelmat)
- Geometria –sovellusta (geometristen kuvioiden piirtäminen ja tutkiminen, voimakuvioiden piirtäminen)
- DataQuest –sovellusta (datan analysointi)

5. Tehtävä

a) Kuluttahintaindeksi nousee kesäkuun 2006 arvosta 101,7 kesäkuun 2010 arvoon 109,7. Kuluttajahinta on noussut siten:

$$\frac{109.7-101.7}{101.7} \blacktriangleright 0.078663\,\%$$

b) Vuokrataso sopimushetkellä syyskuussa saadaan selville indeksien avulla. Indeksin arvo syyskuussa 2011 on 114,2 ja tammikuussa 2014 indeksi on 119,0

Indeksi on siten kasvanut $\frac{119}{114.2} \blacktriangleright 1.04203$ %, eli vuokra sopivuushetkellä oli

$\frac{542}{1.04203} \blacktriangleright 520.139$ € /kk.

Vastaus: a) 7,9 % b) 520 €

6. Tehtävä

a) Lasketaan laudan tilavuus:

$V = A \cdot h$

$(2\cdot 0.26\cdot 0.14+2\cdot 0.26\cdot 0.1+0.14\cdot 0.18+0.1\cdot 0.1)\cdot 0.02 \blacktriangleright 0.0032\ m^3$

Huom. voidaan käyttää myös yksiköitä:

$(2\cdot 26\cdot \_cm\cdot 14\cdot \_cm+2\cdot 26\cdot \_cm\cdot 10\cdot \_cm+14\cdot \_cm\cdot 18\cdot \_cm+10\cdot \_cm\cdot 10\cdot \_cm)\cdot 2\cdot \_cm \blacktriangleright 0.0032\cdot \_m^3$

Massa saadaan tilavuuden ja tiheyden avulla:

$m = \rho\cdot V$

$\frac{550\cdot \_kg}{\_m^3}\cdot 0.0032\cdot \_m^3 \blacktriangleright 1.76\cdot \_kg$

Vastaus: 1.76 kg.

b) Pöntön tilavuus:

$10\cdot \_cm\cdot 10\cdot \_cm\cdot 24\cdot \_cm \blacktriangleright 0.0024\cdot \_m^3$

Vastaus voidaan muuttaa esim. litroiksi: $0.0024\cdot \_m^3 \blacktriangleright \_l \blacktriangleright 2.4\cdot \_l$

7. Tehtävä

a) Parittomia numeroita on 5 kpl: 1,3,5,7 ja 9. Sama numero ei esiinny kuin kerran.

1. numero voidaan valita viidellä eritavalla ja seuraava neljälla jne.

$5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 \blacktriangleright 120$

b) Numero 9 ei ole mukana.

Vaihtoehtoja on vain 3715 ja 5173. Reunimmaiset numerot,

eli 1 ja 7 on laitettava keskelle, sillä 3 ja 5 eivät voi olla vierekkäin:

sillä se johtaisi tilanteeseen, jossa x3x5 tai x5x3, koska tällöin x:n paikalle ei löytyisi sopivaa numeroa

8. Tehtävä

a) Veren CRP pitoisuus kaksinkertaistuu nopeimmillaan jo kahdekassa tunnissa ja noudattaa silloin mallia:

$\mathbf{crp}(t):=c_o\cdot 2^{\frac{t}{8}}$ ▸ *Valmis*, missä t on aika ja c_0 CRP:n arvo hetkellä $t=0$.

Lasketaan kuinka korkealle CRP nousee kuudessa tunnissa, kun se alussa on 40:

$\mathbf{crp}(6)|c_o=40$ ▸ $40\cdot 2^{\frac{3}{4}}$ ≈ 67.2717

b) CRP:n arvo puoliintuu 19 tunnissa, jolloin arvon pieneneminen sadasta kymmeneen tapahtuu nopeimmillaan:

$\text{solve}\left(100\cdot (0.5)^{\frac{t}{19}}=10,t\right)$ ▸ $t=63.1166$, eli kahdessa vuorokaudessa ja 15 tunnissa.

Maanantaista klo 12:00 kaksi vuorokautta ja 15 tuntia eteenpäin on torstaina klo 3:00.

9. Tehtävä

Suoran L_1 yhtälö

$\text{solve}\left(y-0=\frac{5-0}{0-3}\cdot (x-3),y\right)$ ▸ $y=\frac{-5\cdot (x-3)}{3}$

Suoran L_2 yhtälö

$\text{solve}\left(y-0=\frac{3-0}{0-6}\cdot (x-6),y\right)$ ▸ $y=\frac{-(x-6)}{2}$

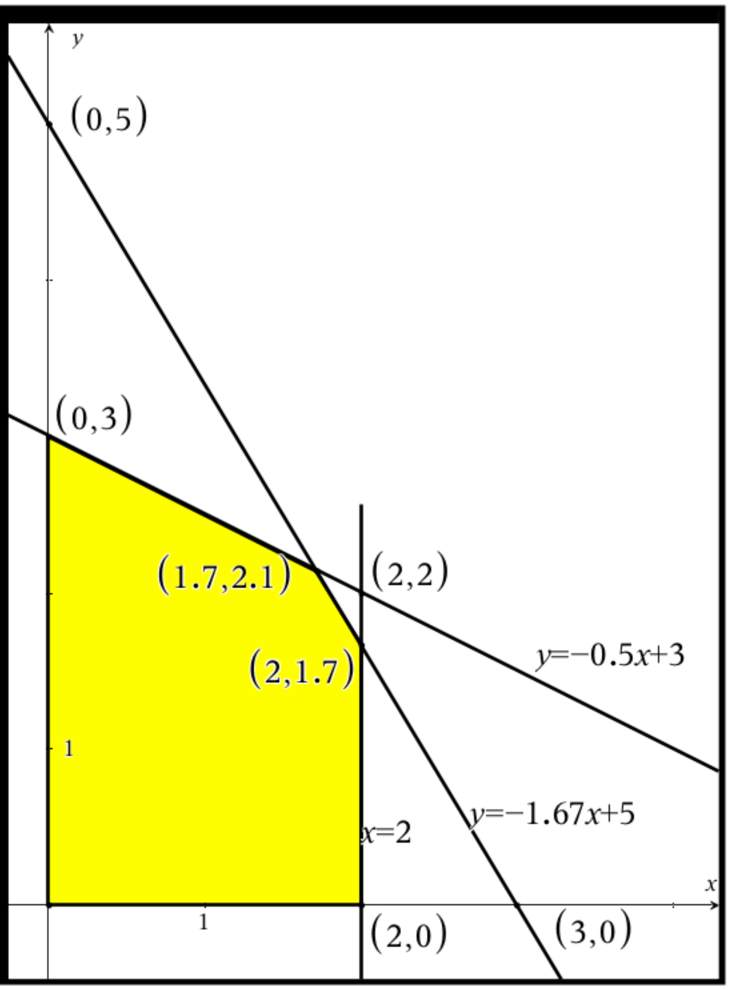
Suoran L_3 yhtälö $x=2$

Suorien L_1 ja L_2 leikkauspisteessä

$\text{solve}\left(\begin{cases} y=\frac{-5\cdot (x-3)}{3} \\ y=\frac{-(x-6)}{2} \end{cases},\{x,y\}\right)$ ▸ $x=\frac{12}{7}$ and $y=\frac{15}{7}$

Suorien L_1 ja L_3 leikkauspisteessä

$y=\frac{-5\cdot (x-3)}{3}|x=2$ ▸ $y=\frac{5}{3}$



Kiinnostavia pisteitä ovat siis $(0,0)$, $(0,3)$, $\left(\frac{12}{7},\frac{15}{7}\right)$, $\left(2,\frac{5}{3}\right)$ ja $(2,0)$.

Lasketaan funktion arvot näissä tapauksissa:

Tallennetaan $\mathbf{f}(x,y):=2\cdot x-4\cdot y+10$ ▸ *Valmis*

$\mathbf{f}(0,0)$ ▸ 10

$\mathbf{f}(0,3)$ ▸ $^-2$ pienin arvo

$\mathbf{f}\left(\frac{12}{7},\frac{15}{7}\right)$ ▸ $\frac{34}{7}$

$\mathbf{f}(2,0)$ ▸ 14 suurin arvo

Vastaus: Pienin arvo on −2 ja suurin 14

10. Tehtävä

a) Perintöveroa maksetaan 1700 €, kun perinnön arvo ylittää 40 000 €.

Annikan saama 58 000 € perintö ylittää tämän rajan 18 000 eurolla. Tästä ylimenevästä osasta maksetaan 11% veroa :

$0.11\cdot 18000$ ▸ $1980.$ €

Veroa maksetaan siten yhteensä:

$1700+1980$ ▸ 3680 €

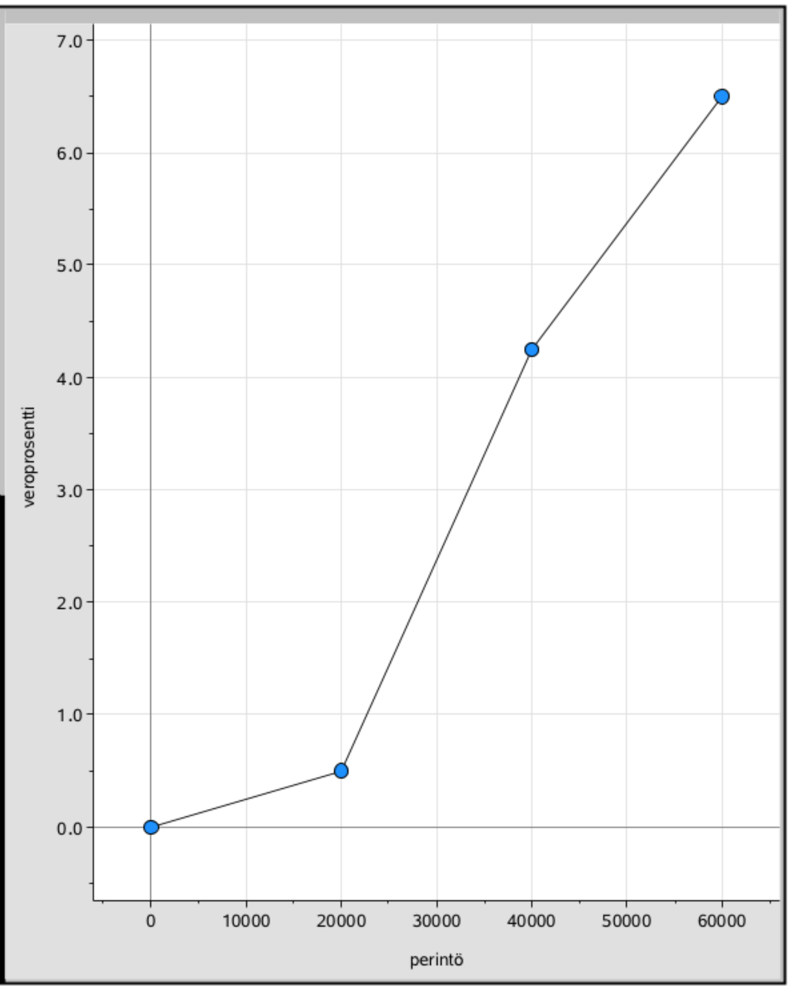
Perinnöstä hän maksaa veroa siten

$\frac{3680}{58000}$ ▸ 0.063448, eli noin 6.3%.

10 b) Lasketaan perintöveron osuus nivelkohdissa prosentteina:

	A perintö	B vero	C veroprosentti	D	E	F
=						
1	0	0	0			
2	20000	100	0.5			
3	40000	1700	4.25			
4	60000	3900	6.5			
5						
6						
7						
8						
9						

A1 0



11. Tehtävä

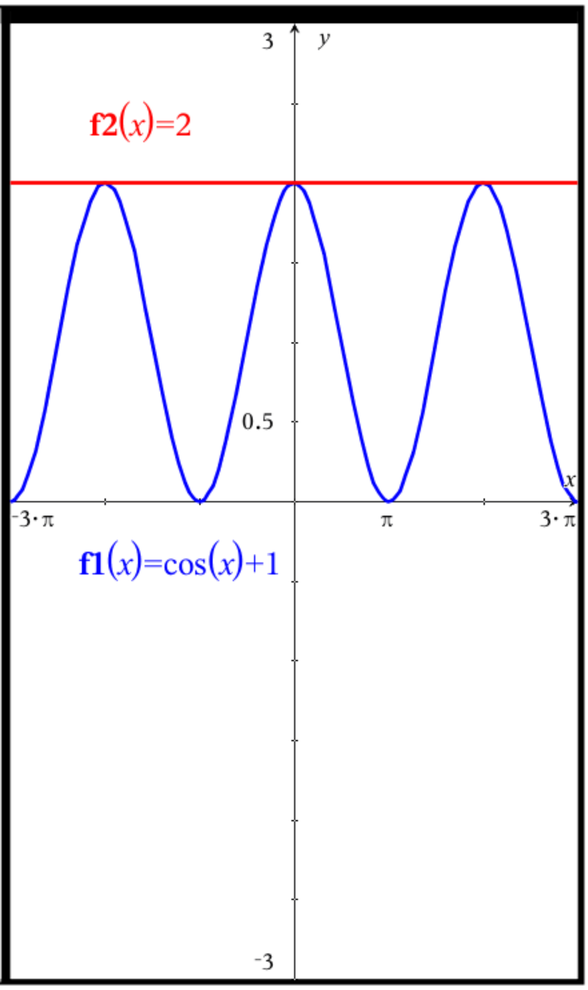
a) Funktio cos(x) saa arvoja välillä -1 ja 1. Funktio $f(x)=\cos(x)+1$ saa siten arvoja välillä 0 ja 2. Tämä voidaan todeta myös funktion kuvaajaa tutkimalla.

b) Myös funktio $\sin(x)$ saa arvoja välillä -1 ja 1.
Näin ollen funktio $g(x)=A\cdot \sin(x)+B$, missä $A>0$ ja $B>0$ saa arvoja välillä: $A\cdot(-1)+B$ ja $A\cdot 1+B$.

Vastaus

a) Pienin arvo 0 ja suurin 2.

b) $[-A+B, A+B]$



12. a) Alla täydennetty taulukko.

	A t	B s	C lg_t	D lg_s	E	F	G	H	I	J	K	L	M
=		=10*t^2	=log('t,10)	=log('s)									
1	1	10	0	1									
2	2	40	log(2)	log(40)									
3	4	160	2*log(2)	log(160)									
4	10	1000	1	3									
5	100	100000	2	5									
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													

A1 1

b) Ajan ja paikan logaritmit asettuvat suoralle, joka leikkaa pystyakselin kohdassa 1. Pisteisiin sovitetun suoran kulmakerroin on 2.

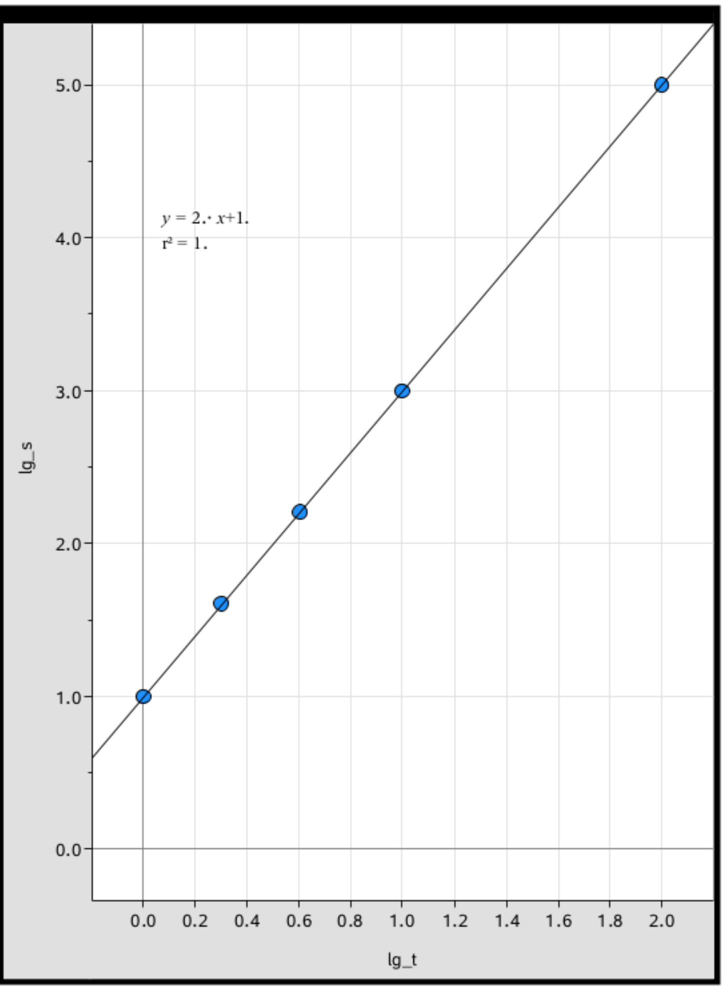
Ratkaistaan s yhtälöstä:

$\log(\mathbf{s})=2\cdot\log(\mathbf{t})+1$

$\text{solve}\left(\log_{10}(s_1)=2\cdot\log_{10}(t_1)+1,s_1\right)$

$\blacktriangleright\ s_1=10\cdot t_1^{\,2} \text{ and } t_1\geq 0$

Eli y−akselin leikkauspiste vastaa kerrointa 10 ja kulmakerroin 2 vastaa eksponenttia 2.



13. Tehtävä

Viereisen taulukon päättelyn mukaisesti kerroksia, joissa joutuu odottelemaan yli 22 sekuntia on 7 kpl. Nämä on merkitty harmaalla. Keltaisella on merkitty hissien odotuskerrokset.

Todennäköisyys, että hissi tilataan joistakin näistä kerroksista on

$0.025+0.025+0.025+0.025+0.025+0.025+0.025$

$= 0.175$

Vastaus 17.5 % todennäköisyydellä

	A kerros	B odotus	C	D	E	F
=						
1	0	15				
2	1	0				
3	2	15				
4	3	20				
5	4	25				
6	5	25				
7	6	20				
8	7	15				
9	8	0				
10	9	15				
11	10	20				
12	11	25				
13	12	30				
14	13	25				
15	14	20				
16	15	15				
17	16	0				
18	17	15				
19	18	20				
20	19	25				
21	20	30				

A1 0