Kevään 2016 Pitkän matematiikan YO–kokeen TI–Nspire CAS –ratkaisut

Nämä ratkaisut tehty alusta loppuun TI–Nspire CX CAS –ohjelmistolla ja tallennettu lopuksi PDF –muotoon. Tarkoituksena on havainnollistaa, miten tietokoneella voidaan rakentaa lyhyen ja pitkän matematiikan vastauksia.

TI–Nspire on matematiikan ja luonnontieteiden ohjelmisto, jolla opiskelijat tulevissa Digabi ja Abitti –kokeissa voivat laatia koko vastauksensa kätevästi yhden ohjelman sisällä. Mikä tärkeintä, eri sovelluksissa tehdyt osiot linkittyvät automaattisesti yhteen, nopeuttaen ja selkeyttäen vastaamisprosessia. Muokattaessa esim. funktion lauseketta tekstin seassa, muuttuu funktion kuvaaja automaattisesti.

Koevastauksen laatimisessa voidaan esimerkiksi hyödyntää.

- Muistiinpanot –sovellusta (perustelut, kaavat, laskut)
- Kuvaajat –sovellusta (kuvaajat ja niiden tulkinta, analyyttisen geometrian ongelmat)
- Geometria –sovellusta (geometristen kuvioiden piirtäminen ja tutkiminen, voimakuvioiden piirtäminen)
- DataQuest –sovellusta (datan analysointi)

5. Tehtävä

Vaihtoehtoja yhteensä 37 kpl.

a) Voittavia vaihtoehtoja 1. Voitto 35 €, tappio 1 €.

Odotusarvo $\frac{36}{37}\cdot {}^{-}1+\frac{1}{37}\cdot 35=\frac{{}^{-}1}{37}$

b) Voittavia vaihtoehtoja 3, voitto 11 €, tappio 1 €.

Odotusarvo $\frac{37-3}{37}\cdot {}^{-}1+\frac{3}{37}\cdot 11=\frac{{}^{-}1}{37}$

c) Voittavia vaihtoehtoja 18, voitto 1 €, tappio 1 €.

Odotusarvo $\frac{37-18}{37}\cdot {}^{-}1+\frac{18}{37}\cdot 1=\frac{{}^{-}1}{37}$

Vastaus a) $-\frac{1}{37}$ €, b) $-\frac{1}{37}$ €, c) $-\frac{1}{37}$ €

6. Tehtävä

Lasketaan pohjoisen napapiirin säde kuvanmukaisesti muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta

$\sin(90°-66.5°)=\dfrac{r}{6371}$, josta

$r=\sin(23.5°)\cdot 6371 = 2540.43$

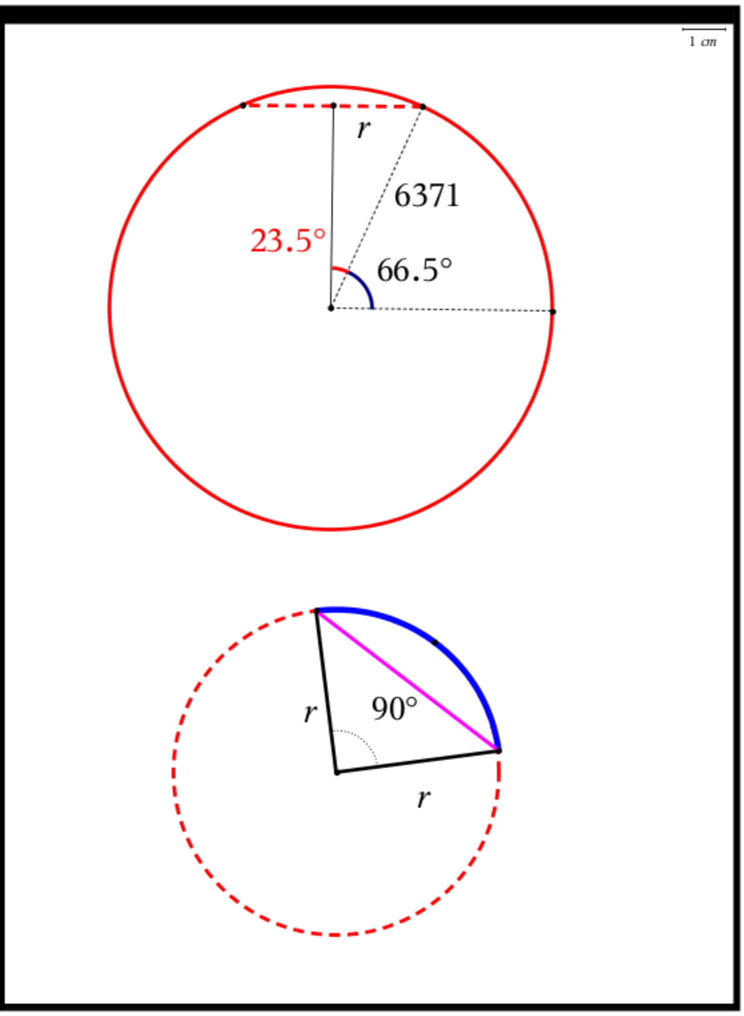
a) Kysytty tunnelin pituus on alemmassa kuvassa suorakulmaisen kolmion hypotenuusa

$\sqrt{(2540.43)^2+(2540.43)^2} = 3592.71$

b) Kaaren lyhyemman kaaren pituus on 1/4−osa koko napapiirin pituudesta, eli

$\dfrac{2\cdot\pi\cdot 2540.43}{4} = 3990.5$

Vastaus a) 3593 km b) 3991 km



7. Tehtävä

Olkoon kysytyn ympyrän säde x.

Pythagoraan lauseen avulla isosta kolmiosta saadaan sinisen ja vihreän janan yhteispituudeksi $\sqrt{5^2-3^2} = 4$.

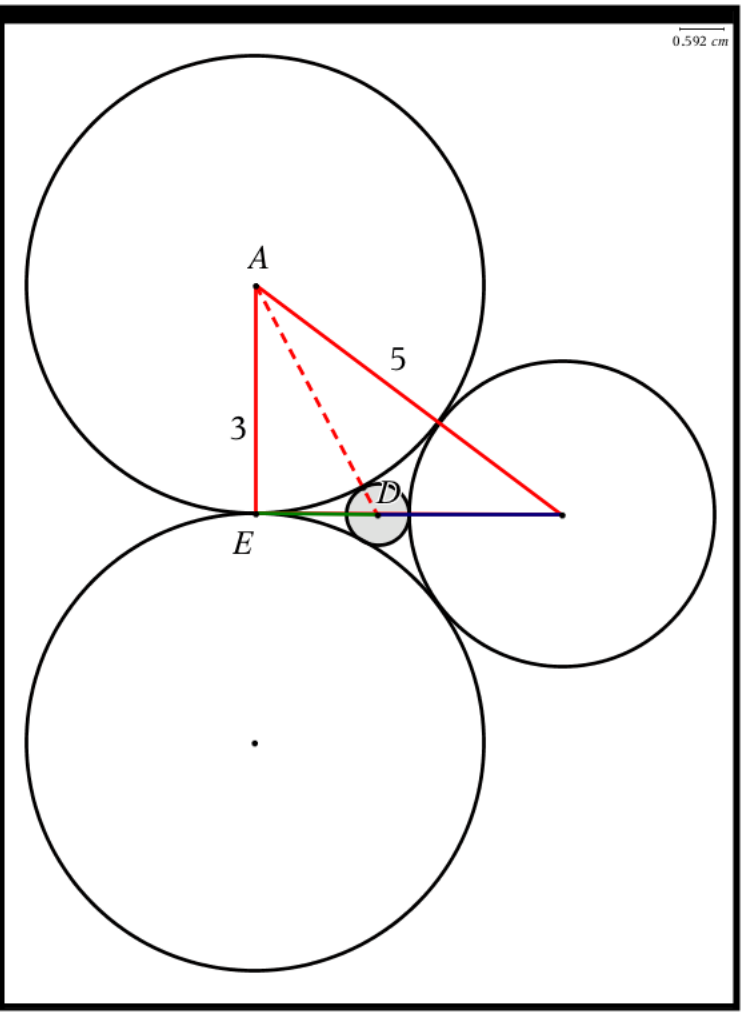
Tällöin vihreän janan pituus on $4-(2+x)=2-x$

Pythagoraan lause kolmiolle AED

$(3+x)^2=3^2+(2-x)^2$, josta x

$\text{solve}\left((3+x)^2=3^2+(2-x)^2,x\right) \blacktriangleright x=\dfrac{2}{5}$

Vastaus: Kysytyn ympyrän säde on $\dfrac{2}{5}$



8. Tehtävä

a) Tason yhtälö on muotoa $a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z+d=0$. Koska xy−tasossa $x+2y=3$, on oltava $x+2\cdot y+c\cdot z-3=0$, josta voidaan ratkaista c tunnetun pisteen $(2,4,6)$ avulla:

$$\text{solve}(2+2\cdot 4+c\cdot 6-3=0,c) \blacktriangleright c=\frac{-7}{6}$$

b) Tason ja x−akselin leikkauspisteen x−koordinaatti: $\text{solve}(x+2\cdot y=3,x)|y=0 \blacktriangleright x=3$

Tason ja y−akselin leikkauspisteen y−koordinaatti: $\text{solve}(x+2\cdot y=3,y)|x=0 \blacktriangleright y=\frac{3}{2}$

Tason ja z−akselin leikkauspisteen z−koordinaatti: $\text{solve}\left(0+2\cdot 0-\frac{7}{6}\cdot z-3=0,z\right) \blacktriangleright z=\frac{-18}{7}$

Vastaus:

a) Tason yhtälö on $x+2\cdot y-\frac{7}{6}\cdot z-3=0$.

b) Akseleiden leikkauspisteet ovat $(3,0,0)$, $\left(0,\frac{3}{2},0\right)$ ja $(0,0,-18/7)$

Tehtävä 9.1

$x_1=1$ ja $y_2=\frac{20}{x_1}=20$

$x_2=\frac{x_1+y_1}{2}=\frac{1+20}{2}=10.5 \quad y_2=\frac{20}{10.5}\approx 1.90476$

$x_3=\frac{x_2+y_2}{2}=\frac{10.5+1.90476}{2}\approx 6.20238$

$y_3=\frac{20}{6.20238}\approx 3.22457$

Jatketaan laskemista taulukkolaskentaa hyödyntäen

Suhteellinen virhe

$$\frac{|4.47213596-4.4783144454744|}{4.47213596} \blacktriangleright 0.001382$$

Vastaus: 0.1 %

	A	B	C	D	E
=					
1	1	20.			
2	10.5	1.90476			
3	6.20238	3.22457			
4	4.71347	4.24315			
5	4.47831	4.46597			
6	4.47214	4.47213			
7	4.47214	4.47214			
8	4.47214	4.47214			
9	4.47214	4.47214			
10	4.47214	4.47214			
11	4.47214	4.47214			
12	4.47214	4.47214			
13	4.47214	4.47214			
14	4.47214	4.47214			
15	4.47214	4.47214			
16	4.47214	4.47214			
17	4.47214	4.47214			
18	4.47214	4.47214			
19	4.47214	4.47214			
20	4.47214	4.47214			
21	4.47214	4.47214			

A1 1

Tehtävä 9.2

Ehdosta $-20 \le g(x) \le 16$ kaikillla reaaliluvuilla voidaan päätellä, että g on määritelty kohdassa $x=0$. Funktio on derrivoituva kohdassa $x=0$, mikäli raja−arvo

$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right)$ on olemassa.

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h^2\cdot g(h)-0^2 g(0)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h^2\cdot g(h)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}(h\cdot g(h))$$

Koska $-20 \le g(x) \le 16$, $\lim_{h\to 0}(h\cdot g(h))=0$

Funktio f on siis derivoituva kohdassa $x=0$.

Tehtävä 10.

a) Viimeinen luku on sama kuin jakojäännös jaettuna luvulla 10

Koska $2016 \equiv 6 \pmod{10}$ myös $2016^{2016} \equiv 6^{2016} \pmod{10}$. Kaikki luvun 6 potenssit päättyvät lukuun 6 *(todistus seuraavalla sivulla)*, joten myös 2016^{2016} viimeinen luku on 6.

b) $2016^{2016}=10^{\log\left(2016^{2016}\right)}=10^{2016\cdot\log(2016)}$, jossa $2016\cdot\log_{10}(2016) \approx 6661.85290$

$2016^{2016}=10^{6661.8529\ldots}=10^{0.8529\ldots}\cdot 10^{6661}$, jossa $10^{0.8529} \approx 7.12689$

Kaksi ensimmäistä lukua ovat siis 7 ja 1.

c) Luvussa on edellisen kymmenpotenssiesityksen perusteella $6661+1=6662$ numeroa.

Väite: Luvun 6^n viimeinen numero on 6, kun n on luonnollinen luku.

Todistetaan väite induktiolla:

I1: Väite tosi, kun $n=1$, koska $6^1=6$.

I2: Oletetaan, että väite pätee jollakin $n \geq 1$

I3: Tutkitaan päteekö väite, arvolla $n+1$

$$6^{n+1} = 6^n \cdot 6 = 6^n \cdot (5+1) = 6^n \cdot 5 + 6^n$$

Luvun $6^n \cdot 5 = 6^{n-1} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 6^{n-1} \cdot 3 \cdot 10$ viimeinen numero on 0.

Luvun 6^n viimeinen numero on I2 perusteella 6, joten summan $6^n \cdot 5 + 6^n$ viimeinen numero on 6

Tehtävä 11

Olkoon tölkin pohjan ala $\pi \cdot r^2$ ja korkeus $\mathbf{h}$. Tällöin tölkin tilavuus on $V=\pi \cdot r^2 \cdot \mathbf{h}$

Koska tilavuus on $1000\ \mathrm{m}^3$, korkeus on toisaalta $\mathbf{h}(r) := \dfrac{1000}{\pi \cdot r^2}$

Muodostetaan funktio, joka kuvaa kustannuksia $\mathbf{hinta}(r) := 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \dfrac{1000}{\pi \cdot r^2} \cdot 1$.

Funktion derivaattafunktio on $\dfrac{d}{dr}(\mathbf{hinta}(r)) = 8 \cdot \pi \cdot r - \dfrac{2000}{r^2}$, jonka nollakohta on

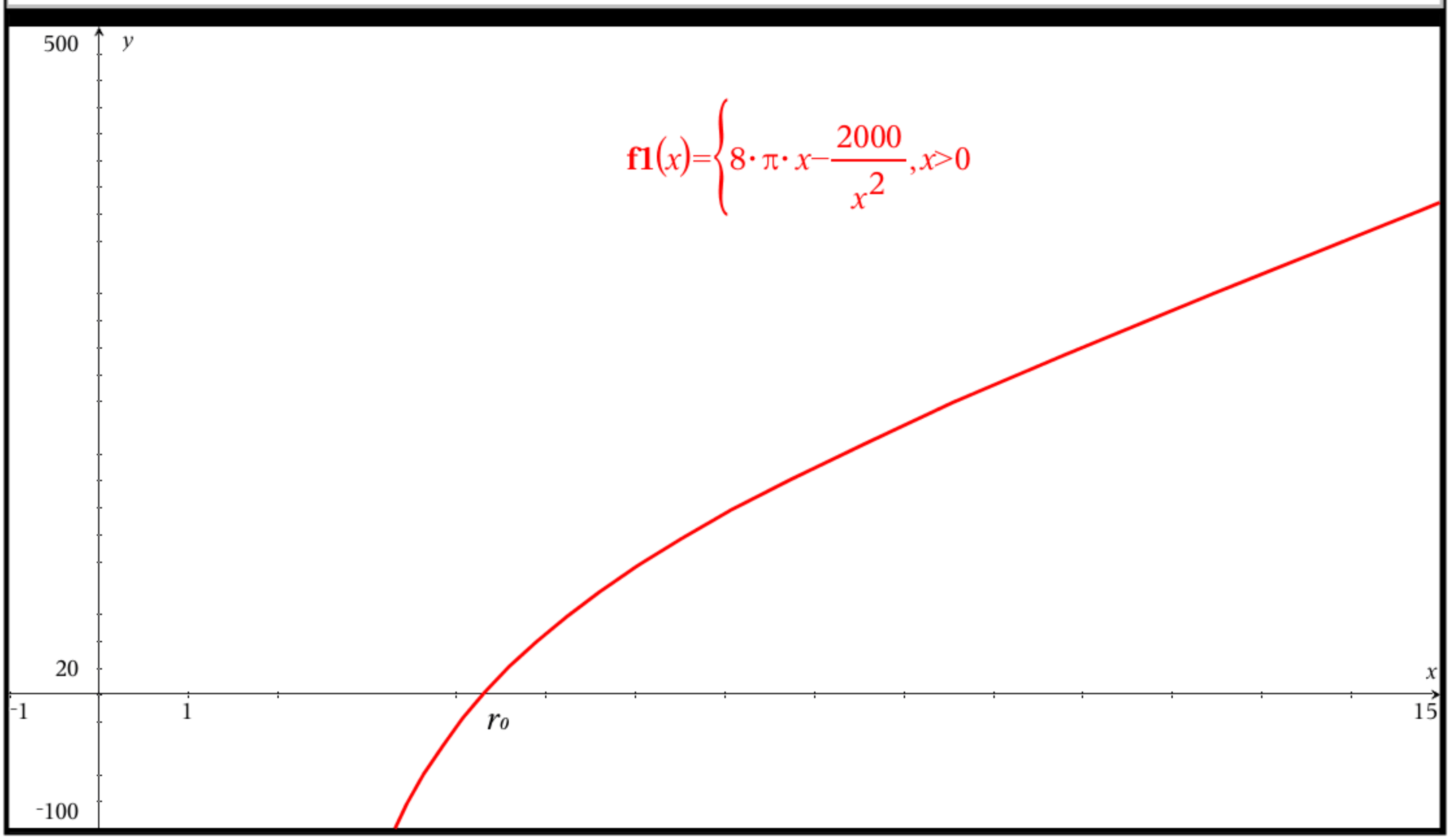
$\operatorname{zeros}\left(\dfrac{d}{dr}(\mathbf{hinta}(r)), r\right) \blacktriangleright \left\{\dfrac{5 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}\right\}$. Tallennetaan kyseinen arvo muistiin $\mathbf{r_0} := \dfrac{5 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} \blacktriangleright \dfrac{5 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}$

Funktion saa pienimmän arvonsa (r>0) derivaatan nollakohdassa (derivaatan kuvaaja).

Lasketaan kysytty suhde $\dfrac{\text{korkeus}}{\text{pohjan halkaisija}} = \dfrac{\mathbf{h}(\mathbf{r_0})}{2 \cdot \mathbf{r_0}} = 2$

Vastaus: Kysytty suhde on 2

Derivaattafunktion kuvaaja



Tehtävä 12

a) Funktio $|\sin(t)|$ on jaksollinen, jakso π. Laskettaessa $f(2\pi)$ lasketaan määrätty integraali kahden kokonaisen jakson yli. Laskettaessa $2f(\pi)$ lasketaan määrätty integraali yhden kokonaisen jakson yli ja kerrotaan kahdella, joten $2f(\pi)=f(2\pi)$.

b) Jaetaan tehtävä kahteen osaan:

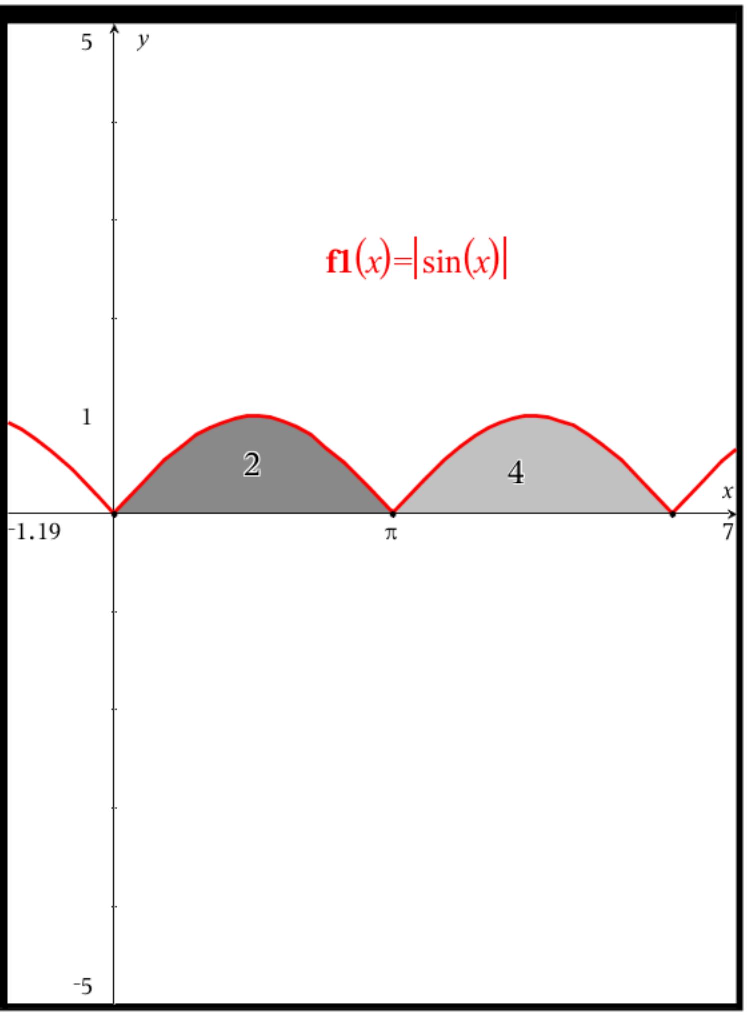
Kun $0\le x\le\pi$,

$$f(x)=\int_0^x \sin(t)\,dt = 1-\cos(x).$$

Kun $\pi<x\le 2\pi$,

$$f(x)=\int_0^\pi \sin(t)\,dt+\int_\pi^x -\sin(t)\,dt = \cos(x)+3.$$

$$f(x)=\begin{cases}1-\cos(x), 0\le x\le\pi\\ \cos(x)+3, \pi<x\le 2\pi\end{cases}$$



Tehtävä 13.

Kolmion pinta−ala on sama kuin puolet kolmion sivuvektoreiden ristitulovektorin pituudesta $A=|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|/2$. Tallennetaan muistiin funktio, joka laskee kolmion pinta−aloja:

$$\mathbf{ala}(u,v):=\frac{\mathrm{norm}(\mathrm{crossP}(u,v))}{2}$$

Tällöin tahkojen pinta−alat ovat:

$$A=\mathbf{ala}([0\ \ b\ \ 0],[0\ \ 0\ \ c]) \blacktriangleright \frac{|b\cdot c|}{2} \qquad B=\mathbf{ala}([a\ \ 0\ \ 0],[0\ \ 0\ \ c]) \blacktriangleright \frac{|a\cdot c|}{2}$$

$$C=\mathbf{ala}([a\ \ 0\ \ 0],[0\ \ b\ \ 0]) \blacktriangleright \frac{|a\cdot b|}{2} \qquad D=\mathbf{ala}([a\ \ {}^{-}b\ \ 0],[a\ \ 0\ \ {}^{-}c]) \blacktriangleright \frac{\sqrt{a^2\cdot(b^2+c^2)+b^2\cdot c^2}}{2}$$

Tällöin $A^2+B^2+C^2=\mathrm{expand}\left(\left(\frac{|b\cdot c|}{2}\right)^2+\left(\frac{|a\cdot c|}{2}\right)^2+\left(\frac{|a\cdot b|}{2}\right)^2\right) \blacktriangleright \frac{a^2\cdot b^2}{4}+\frac{a^2\cdot c^2}{4}+\frac{b^2\cdot c^2}{4}$

ja $D^2=\mathrm{expand}\left(\left(\frac{\sqrt{a^2\cdot(b^2+c^2)+b^2\cdot c^2}}{2}\right)^2\right) \blacktriangleright \frac{a^2\cdot b^2}{4}+\frac{a^2\cdot c^2}{4}+\frac{b^2\cdot c^2}{4}$