Syksyn 2015 Lyhyen matematiikan YO−kokeen TI−Nspire CAS −ratkaisut

Tekijät: Olli Karkkulainen ja Markku Parkkonen

Ratkaisut on laadittu TI−Nspire CAS −tietokoneohjelmalla käyttäen **Muistiinpanot** −sovellusta. Kaavat ja laskut on kirjoitettu Math −ruutuihin. Math −ruutu sisältää kaikki samat laskutoiminnot kuin laskinsovelluskin. Math −ruutujen laskuja ja lausekkeita voi jälkikäteen muokata ja ovat siten dynaamisia, mikä helpottaa ratkaisun hahmottelua ja muokkaamista.

− Math −ruutu listätään ***Lisää*** −valikon kautta tai pikanäppäimellä ***CTRL + M***

− Math −ruutu näyttää tältä: $\mathbf{f}(x):=a\cdot x^{b}$ ja tämän derivaatta $\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x)) \blacktriangleright a\cdot b\cdot x^{b-1}$

− Laskutoimitus lasketaan painamalla ***Enter.*** Syöte on sininen ja tulos on vihreä.

− Kun kirjoitetaan vain kaava, siirretään kursori ruudun ulkopuolelle ja kaava säilyy mustana.

− Math −ruudun määrityksiä voidaan muuttaa valitsemalla 5:Math−ruudun asetukset tai klikkaamalla hiiren kakkospainiketta ruudun päällä.

Näiden malliratkaisujen tavoitteena on havainnolistaa TI−Nspire CAS −tietokoneohjelman käyttöä sähköisen koesisällön tuottamisessa. Lisätietoja **www.nspire.fi**

Tehtävä 1

a) Luvun -1 vastaluku on 1 ja luvun 5 käänteiluku on $\frac{1}{5}$, joten keskiarvo on $\frac{1+\frac{1}{5}}{2}=\frac{3}{5}$

b) Neliön pinta−ala on $2^2=4$ ja ympyrän ala on $\pi\cdot\left(\frac{2}{2}\right)^2=\pi$.

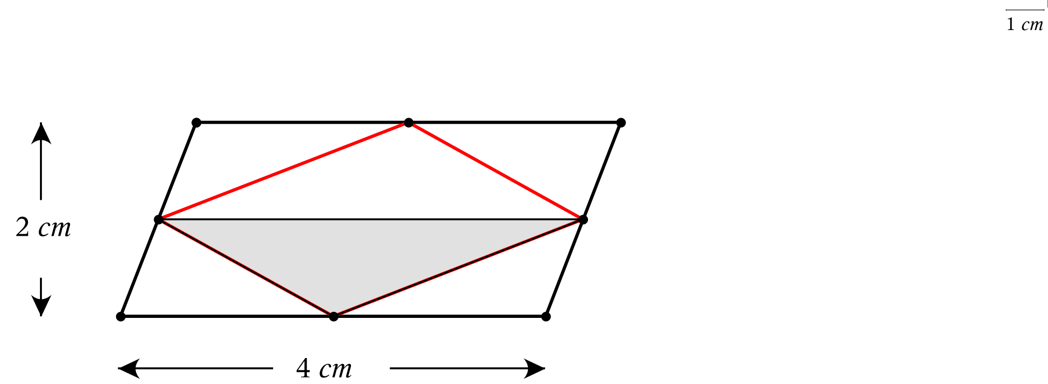
$\frac{4-\pi}{\pi}\approx 0.27324$, joten neliön ala on $27\ \%$ suurempi.

c) Ratkaistaan yhtälö $\text{solve}\left(2^{3\cdot x-2}=2^{x+1},x\right) \blacktriangleright x=\frac{3}{2}$

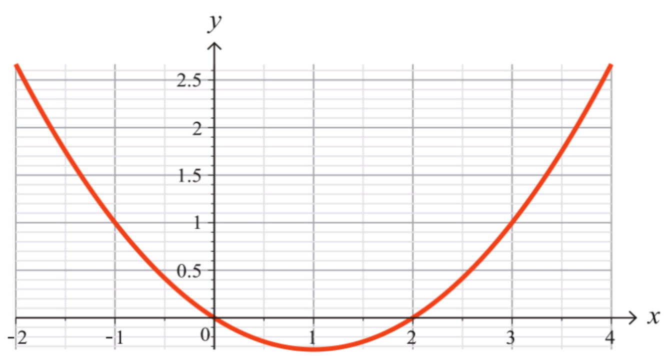
Tehtävä 2

Kuvaan merkityn harmaan kolmion kanta on sama kuin suunnikkaan kanta ja korkeus on puolet suunnikkaan korkeudesta, eli 1 cm. Kysytun kuvion ala on kaksi kertaa harmaan kolmion ala, eli pinta−ala on $2\cdot\frac{4\cdot 1}{2}=4$.

Vastaus $4\,\mathrm{cm}^2$



Tehtävä 3



a) $f(x)=1$, kun $x=-1$ tai $x=3$.
b) $f(x)\le 0$, kun $0\le x\le 2$.
c) $f'(x)\le 0$, kun $-2\le x\le 1$.

Tehtävä 4

$$EQ = \frac{\text{aivojen massa}}{0.012\cdot(\text{kehon massa})^{2/3}}$$

a) Sijoitetaan koiran massa 10 kg ja EQ−luku 1.0 yhtälöön ja ratkaistaan aivojen massa.

$$1.0 = \frac{x}{0.012\cdot(10)^{2/3}}, \quad \text{solve}\left(1.=\frac{x}{0.012\cdot 10^{\frac{2}{3}}},x\right) \blacktriangleright x=0.055699$$

b) Sijoitetaan ihmisen aivojen massa ja EQ−luku. Ratkaistaan kehon massa m.

$$\text{solve}\left(7.5=\frac{1.35}{0.012\cdot m^{\frac{2}{3}}},m\right)|m>0 \blacktriangleright m=58.0948$$

Vastaus

a) 56 grammaa b) 58 kg

Tehtävä 5

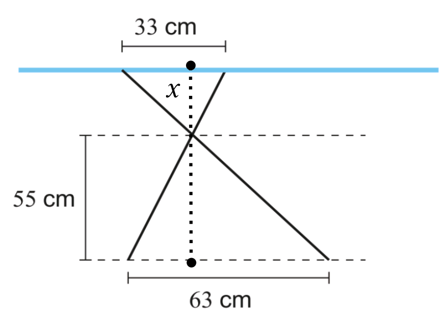
Yhdenmuotoisten kolmioiden korkeuden suhde kantaan on

$\frac{x}{33}=\frac{55}{63}$, josta x $\text{solve}\left(\frac{x}{33}=\frac{55}{63},x\right) \blacktriangleright x=\frac{605}{21}$.

Silityslaudan korkeus on $55+\frac{605}{21} \approx 83.8095$

Vastaus

84 cm



Tehtävä 6

a) Sähkön hinnat kulutuksen funktiona

$\mathbf{a}(x):=0.0662\cdot x+4.02$ ▸ *Valmis*

$\mathbf{b}(x):=0.0799\cdot x+3.75$ ▸ *Valmis*

b) Ratkaistaan kulutus x, kun $a(x) = b(x)$

$\text{solve}(\mathbf{a}(x)=\mathbf{b}(x),x)$ ▸ $x=19.708$

Kulutuksen täytyisi olla $19.7\ \text{kWh}$

c) Hintaero kyseisellä kulutuksella on

Yhtiö a: $0.0662\cdot 2000+12\cdot 4.02 = 180.64$

Yhtiö b: $0.0799\cdot 2000+12\cdot 3.75 = 204.8$

Erotus $0.0799\cdot 2000+12\cdot 3.75-(0.0662\cdot 2000+12\cdot 4.02) = 24.16$

Hintaero on 24 euroa

Tehtävä 7

Olkoon meetvurstin määrä $100a$. Tällöin siinä on rasvaa $36a$. Vähennetään rasvaa määrä x.

$\text{solve}\left(\dfrac{36\cdot a-x}{100\cdot a-x}=0.3,x\right)$ ▸ $x=8.57143\cdot a$

Vähentyneen rasvan osuus alkuperäisestä rasvasta on $\dfrac{8.57143\cdot a}{36\cdot a} \approx 0.238095$

Vastaus

24%

Tehtävä 8

Piiri on 1m, joten $b = 1-2r$.

Sektorin ala on $A=\frac{b\cdot r}{2}=\frac{(1-2r)\cdot r}{2}$, jossa $0\leq r\leq \frac{1}{2}$.

Lasketaan pinta−alan derivaattafunktio $\frac{d}{dr}\left(\frac{(1-2\cdot r)\cdot r}{2}\right) \blacktriangleright \frac{1}{2}-2\cdot r$, joka on nolla kun $r = \frac{1}{4}$.

Pinta−alan on alaspäin aukeava paraabeli, joten pinta−alan suurin arvo on derivaatan nollakohdassa $r = \frac{1}{4} = 0.25$.

Vastaus

Pinta−ala on suurin, kun säde on 0.25 m

Tehtävä 9

Alkuperäinen pinta−ala on $20.\cdot 12. \blacktriangleright 240.$

Kun molempiin sivuihin lisätään x, pitäisi pinta−alan on 480.

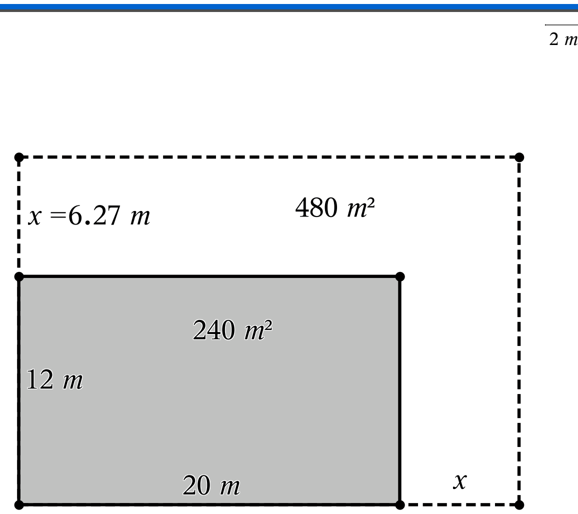
$\text{solve}((20+x)\cdot(12+x)=480,x)$

$\blacktriangleright x=^{-}38.2711 \text{ or } x=6.27106$

Ratkaisuista negatiivinen voidaan jättää huomiotta, jolloin uudet mitat ovat 26.3 m ja 18.3 m.

Vastaus

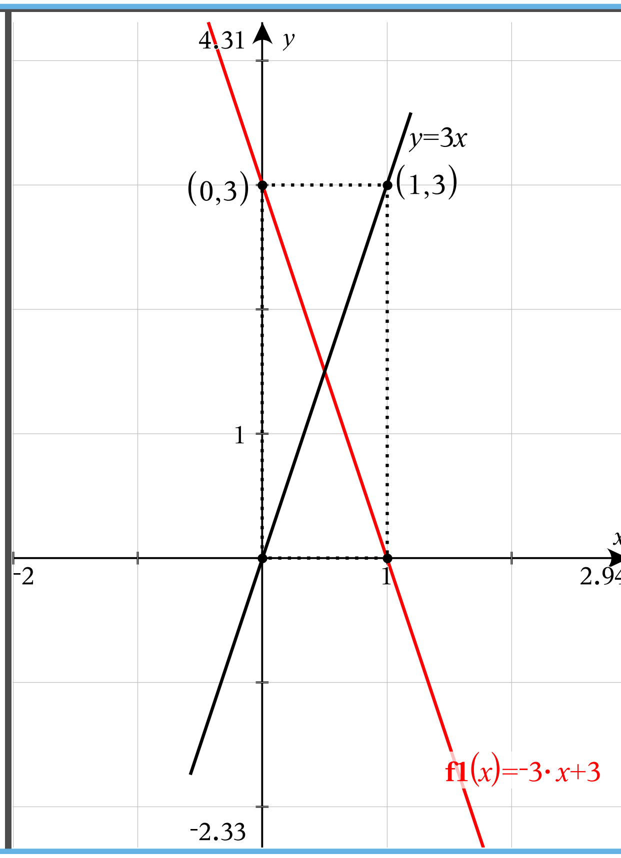
Mitat ovat 26.3 m ja 18.3 m.



Tehtävä 10

Piirretään kuvan mukainen suorakulmio, jonka lävistäjänä on suora $y=3-3x$. Piirretään myös toinen lävistäjä, joka on kysytty suora, sillä lävistäjät jakavat suorakulmion symmetriasyistä neljään yhtä suureen osaan ja täten kolmion kahteen yhtä suureen osaan.

Kysytyn suoran kulmakerroin on siis 3/1=3.



Tehtävä 11

a) Määritetään suoran yhtälö, joka kulkee pisteiden $(1{,}7817)$ ja $(4{,}13238)$ kautta

$\text{solve}(\{7817,13238\}=k\cdot\{1,4\}+b,k,b)$

▸ $k=1807$ and $b=6010$

Suoran yhtälö on $y = 1807x+6010$, missä x aika kuukausina. Joulukuun myynti on siis

$1807\cdot 12+6010 = 27694$

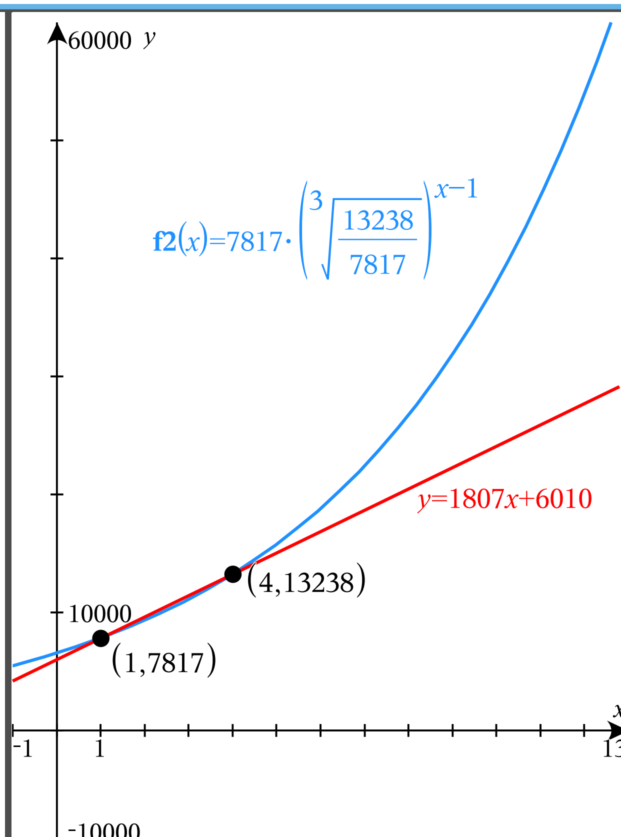
b) Jos myynti y kasvaa eksponentiaalisesti, sitä kuvaa yhtälö $y=7817a^{x-1}$, josta a saadaan yhtälöstä

$$13238=7817a^{4-1} \Leftrightarrow a=\sqrt[3]{\frac{13238}{7817}}$$

Täten joulukuun myynti on

$$7817\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{13238}{7817}}\right)^{12-1} \approx 53939.7$$

Vastaus: a) 27694 b) 53940



Tehtävä 12

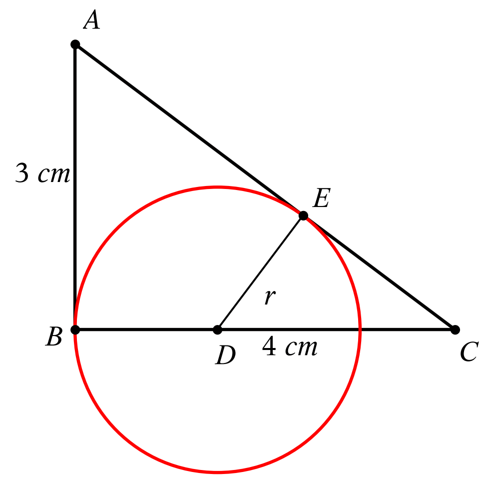
Kuviossa kolmio ABC ja CED ovat yhdemuotoiset (kk), joten

$\frac{r}{4}=\frac{4-r}{\sqrt{3^2+4^2}}$, josta

$\text{solve}\left(\frac{r}{3}=\frac{4-r}{\sqrt{3^2+4^2}},r\right) \blacktriangleright r=\frac{3}{2}$

Vastaus

Säde on 3/2



Tehtävä 13

a) $\text{normCdf}(-\infty,12,15.2,2.5) \blacktriangleright 0.100273$

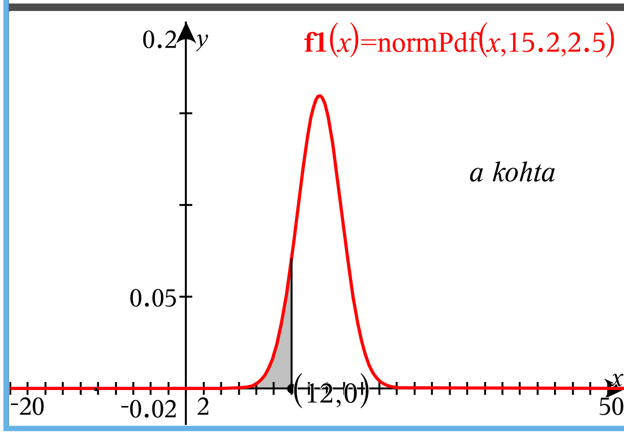
Takuukorjaukseen menee 10%

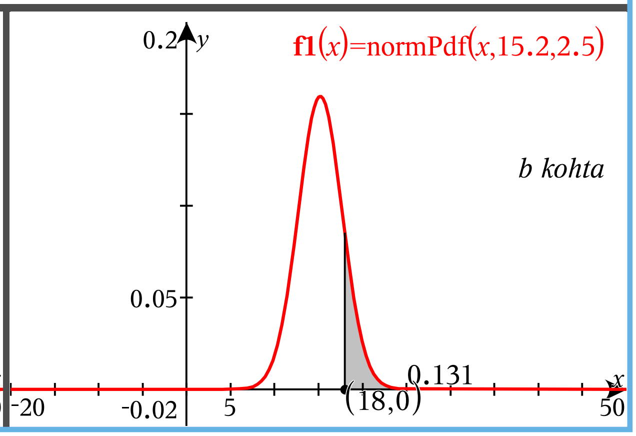
b) $\text{normCdf}(18,\infty,15.2,2.5) \blacktriangleright 0.131357$

Vioittumatta toimii 13 %

Alle on piirretty a) ja b) kohdan kuvaajat

$\mathbf{f1}(x) \blacktriangleright \text{normPdf}(x,15.2,2.5)$





Tehtävä 14

a) Pyydetty funktio on $f(x):=0.3\cdot 40000+0.32\cdot(x-40000)$

eli $f(x) ▸ 0.32\cdot x-800.$ kun $x>40000$.

b)

$f(41700.23) ▸ 12544.0736 \approx 12544.05$ €.

c) Veron osuus:

$30\%\cdot 85\%\cdot 41700.23 ▸ 10633.55865$

ja veron osuus prosentteina osinkotulosta: $\dfrac{10633.55865}{41700.23} \approx 25.5\%$.

Tehtävä 15

Aino ja Mikko ovat maailmanpyörän kyydissä. Korin korkeus y merenpinnan tasosta mitattuna on

$y=17\cdot \sin\left(\dfrac{\pi\cdot t}{25}\right)+55$ metriä

kun ajan t yksikkönä on sekunti ja kulma ilmaistaan radiaaneina.

a) Laske korin suurin ja pienin korkeus sekä maailmanpyörän halkaisija.

b) Kuinka monen sekunnin kuluttua kori saavuttaa ensimmäisen kerran maksimikorkeutensa hetken $t = 0$ jälkeen?

c) Kuinka monen sekunnin kuluttua kori on ensimmäisen kerran hetken $t = 0$ jälkeen 45 metrin korkeudella merenpinnan tasosta? Voit ratkaista tämän kohdan joko graafisesti kuvaajan avulla, kun $0 \le t \le 50$ sekuntia, tai laskemalla lausekkeiden avulla.

<www.panoramio.com>. Luettu 20.2.2014.

a) Koska $-1\leq\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{25}\right)\leq1$ vaihtelee korkeus välillä 55 ± 17 m.

Suurin korkeus on siten 72 m ja pienin 38 m. Halkaisija on $72-38=34$ m

b) Kori saavuttaa huipun ensimmäisen kerran kun $\frac{\pi\cdot t}{25}=\frac{\pi}{2}$, eli ratkaistaan t yhtälöstä $\text{solve}\left(\frac{\pi\cdot t}{25}=\frac{\pi}{2},t\right) \blacktriangleright t=\frac{25}{2}$ $=12.5$ s.

c) Graafisesti:

Klikataan hiiren kakkospainiketta kuvaajan päällä ja valitaan jäljitä työkalu. Klikataan käyrälle piste, joka on lähellä 45 metrin korkeutta vastaavaa kohtaa. Tämän pisteen y−koordinaatin arvo voidaan muuttaa halutuksi, eli luvuksi 45. Tätä korkeutta vastaava aika on n. 30 s.

Lausekkeiden avulla

$\text{solve}(\mathbf{f1}(x)=45,x)|0\leq x\leq50 \blacktriangleright x=30.0044 \text{ or } x=44.9956$, eli noin 30 s.